中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

博士学位论文

关于经典变量、对易与量子版本洛瓦兹局部引理的研究

作者姓名: 何昆

指导教师: 孙晓明 研究员

中国科学院计算技术研究所

学位类别: 工学博士

学科专业: 计算机软件与理论

培养单位: 中国科学院计算技术研究所

2019 年 6 月

A Study on Variable, Commuting and Quantum Lovász Local Lemma

A dissertation submitted to the
University of Chinese Academy of Sciences
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Doctor of Engineering
in Computer Software and Theory

By
He Kun
Supervisor: Professor Sun Xiaoming

Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences

June, 2019

中国科学院大学
学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名:

日　　期:

中国科学院大学
学位论文授权使用声明

本人完全了解并同意遵守中国科学院大学有关保存和使用学位论文的规定，即中国科学院大学有权保留送交学位论文的副本，允许该论文被查阅，可以按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延迟期后适用本声明。

作者签名:	导师签名:
日　　期:	日　　期:

摘 要

洛瓦兹局部引理，也简称局部引理，是组合数学和概率论中一种强有力的工具，它可以用来证明，当一系列“坏事件”满足一定的概率约束和“弱相关”约束时，可以同时避开所有的坏事件。在最近十年，局部引理因为算法化方面的工作以及向量子领域的扩展，又重新得到了理论计算机界的大量关注。目前领域内存在着不同版本的局部引理，主要有抽象版本，变量版本，对易版本和量子版本。这些局部引理有各自的应用。抽象版本局部引理是最经典的局部引理，Shearer 首先给出了抽象版本局部引理的紧的条件。变量版本局部引理假设事件由一系列独立的随机变量决定，尽管变量版本局部引理涵盖了局部引理的绝大多数应用，但人们对变量版本局部引理的紧的条件却知之甚少。2009 年，Ambainis 等人引入了量子版本局部引理，该引理是研究量子可满足性问题的强有力工具。量子版本局部引理的紧的条件也是未知的。还有人研究对易版本局部引理，相关研究主要集中在对易版本局部引理的算法化上，目前还没有对其紧的条件的研究。

第一，我们从数学上刻画了变量版本局部引理紧的条件，并证明了变量版本局部引理同抽象版本是不同的，解决了 Szegedy 提出的开放问题。基于该条件，我们得到了两类很重要的事件-变量图，即树和圈的边界刻画，这是变量版本局部引理的边界首次在某类非平凡的二部图上被刻画清楚。我们还给出了变量版本局部引理同抽象版本有差异的充分必要条件。基于这一条件，我们得到了很多变量版本与抽象版本有差异与无差异的例子。

第二，我们证明了 Shearer 条件对量子版本局部引理是紧的，即最小的未被覆盖的子空间的相对维度完全由独立集多项式刻画。从而解决了 Sattath 等人的猜想，证明了 Gilyen 和 Sattath 的算法是紧的，同时还揭示了在 qudit 维度足够大时几乎所有局域哈密尔顿量的量子可满足性问题都由晶格气模型的配分函数刻画。

第三，我们证明了对易版本局部引理同量子版本（或抽象版本）是不同的。同时，我们还给出了在给定 qudit 维数的情况下，树的对易版本局部引理紧的条件。该结果意味着，对于对易的局域哈密尔顿量，原则上可以设计出在 Shearer 界之外依然高效的算法。

关键词： 变量版本洛瓦兹局部引理，量子版本洛瓦兹局部引理，对易版本洛瓦兹

局部引理，Shearer 界，量子可满足性问题

Abstract

Lovász Local Lemma (LLL) is a very powerful tool in combinatorics and probability theory to show the possibility of avoiding all "bad" events under some "weakly dependent" condition. Over the last decades, the algorithmic aspect of LLL has attracted lots of attention in theoretical computer science. A tight criterion under which the *abstract* version LLL (ALLL) holds was given by Shearer. However, little is known about that of the *variable* version LLL (VLLL) where events are generated by independent random variables, though this model of events is applicable to almost all applications of LLL. Recently, Ambainis et al. introduced a *quantum* version LLL (QLLL), which was then shown to be powerful for the quantum satisfiability problem.

We introduce a necessary and sufficient criterion for VLLL, in terms of the probabilities of the events and the event-variable graph specifying the dependency among the events. Based on this new criterion, we obtain boundaries for two families of event-variable graphs, namely, cycles and trees. These are the first two non-trivial cases where the VLLL boundary is fully determined. Though it is #P-hard in general to determine VLLL boundaries, we can to some extent decide whether a gap exists between a VLLL boundary and the corresponding ALLL boundary. In particular, we show that the gap existence can be decided without solving Shearer's conditions or checking our VLLL criterion. Equipped with this powerful theorem, various event-variable graphs are shown to be gapful/gapless.

We prove that Shearer's bound is tight for QLLL, i.e., the relative dimension of the smallest satisfying subspace is completely characterized by the independent set polynomial, affirming a conjecture proposed by Sattath et al. Our result also shows the tightness of Gilyén and Sattath's algorithm, and implies that the lattice gas partition function fully characterizes quantum satisfiability for almost all Hamiltonians with large enough qudits.

Commuting version LLL (CLLL), LLL for commuting local Hamiltonians which are widely studied in the literature, is also investigated here. We prove that the tight regions of CLLL and QLLL are different in general. This result implies that it is possible to design an algorithm for CLLL which is still efficient beyond Shearer's bound.

Keywords: variable Lovász Local Lemma, quantum Lovász Local Lemma, commuting Lovász Local Lemma, Shearer's bound, quantum satisfiability problem

目 录

图形列表

表格列表

符号列表

字符

Symbol	Description
$[n]$	the set $\{1,2,\ldots,n\}$ for positive integer n
$\mathcal{X},\mathcal{Y}$	sets of mutually independent random variables
X,Y	random variables
$\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}$	vectors of positive real numbers
$\phi(\cdot)$	given $\mathbf{p}\in(0,+\infty)^m$, $\phi(\mathbf{p})$ is the vector whose i-th entry is $\min\{1,p_i\}$
$\mathcal{A},\mathcal{B}$	sets of events, or sets of cylinders
A,B	events, or cylinders
$\overline{A}$	the complementary of the event/cylinder A
$\mathbb{P}(A)$	the probability of event A
$\mathbb{P}(\mathcal{A})$	the vector whose i-th entry is the probability of the i-th event in $\mathcal{A}$
μ	Lebesgue measure on Euclidean (sub)spaces
$\mathbb{I}^{\{i\}}$	the unit interval in the i-th dimension of an Euclidean space
$\mathbb{I}$	simplification of $\mathbb{I}^{\{i\}}$ when i is implicit
$\mathbb{I}^S$	the unit cube $\prod_{i\in S}\mathbb{I}^{\{i\}}$, or simply $\mathbb{I}^n$ when $S=[n]$ for some integer n
$G_D=(V,E)$	the undirected graph with vertex set V and edge set E
$G_B=(V_1,V_2,E)$	the bigraph with vertex set $V_1\cup V_2$ and edge set $E\subseteq V_1\times V_2$.
$L(G_B)$	the left part of $G_B=(V_1,V_2,E)$ is V_1
$R(G_B)$	the right part of $G_B=(V_1,V_2,E)$ is V_2

缩写

LLL	Lovász Local Lemma
VLLL	Variable version Lovász Local Lemma
QLLL	Quantum version Lovász Local Lemma
CLLL	Commuting version Lovász Local Lemma

第 1 章 绪论

1.1 研究背景及意义

洛瓦兹局部引理是最重要的概率方法之一。该引理自Erdős 和 Lovász (1975) 提出之后，在数学、物理和计算机等领域已经有了非常多的应用。在数学中，局部引理被广泛地应用到了组合对象的研究上，如 Ramsey 数 (Spencer, 1977) 和拉丁方 (Erdős 和 Spencer, 1991; Harris 和 Srinivasan, 2014)。在物理学领域，局部引理既和经典统计物理中晶格气模型的配方函数有关 (Scott 和 Sokal, 2005, 2006)，又可以用来刻画量子物理中局部哈密尔顿量是否是无忧的 (Sattath 等, 2016)。在理论计算机领域，局部引理的应用主要有以下几个方面：第一，证明问题有解 (McDiarmid, 1997; Gebauer 等, 2016, 2009)；第二，在问题有解的条件下高效地找到问题的解 (Moser 和 Tardos, 2010; Achlioptas 和 Iliopoulos, 2016a; Harvey 和 Vondrák, 2015; Kolmogorov, 2016)；第三，对问题解的数目进行计数 (Moitra, 2017)，或对特定的分布进行采样 (Guo 等, 2017; Guo 和 He, 2018)。对于很多问题，局部引理得到的界都是紧的 (Gebauer 等, 2016) 或几乎是紧的 (Ambainis 等, 2012)。

给定概率空间中的一组坏事件 $\mathcal{A}$，局部引理给出了保证这些坏事件同时不发生的充分条件，即 $\mathbb{P}(\cap_{A\in\mathcal{A}}\overline{A}) > 0$ 的充分条件。在最一般的情形下，事件集 $\mathcal{A}$ 中坏事件的依赖关系可以由一个无向图 $G_D = ([m], E)$ 来刻画。令 Γ_i 表示顶点 i 在 G_D 中的邻居。我们称无向图 G_D 为事件集 $\mathcal{A}$ 的依赖图，当且仅当 G_D 的每个顶点 i 对应一个坏事件 A_i，且 A_i 同所有的 $\{A_j : j \neq i, j \notin \Gamma_i\}$ 相互独立。我们按如下方式定义依赖图的抽象内部。

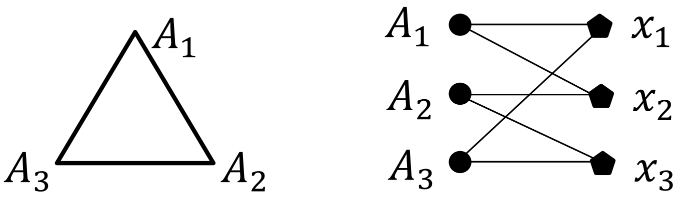
定义 1.1 (依赖图的抽象内部). 给定依赖图 G_D，定义 G_D 的抽象内部，$\mathcal{I}(G_D)$，为

$$\mathcal{I}(G_D) = \Big\{\mathbf{p} : \text{对于任意的事件集 } \mathcal{A}\text{，如果其依赖图为 } G_D\text{，概率向量为 } \mathbf{p}\text{，} \\ \text{则 } \mathbb{P}\left(\cap_{A\in\mathcal{A}}\overline{A}\right) > 0 \text{ 始终成立。}\Big\}$$

抽象版本局部引理（ALLL），就是要给出对 $\mathcal{I}(G_D)$ 的刻画。

最常用到的抽象版本局部引理如下:

定理 1.1 (Spencer (1977)). *给定图 $G_D = ([m], E)$ 和向量 $\mathbf{p} \in (0,1)^m$，如果存在实数 $x_1, \ldots, x_m \in (0,1)$ 使得 $p_i \le x_i \prod_{j\in\Gamma_i}(1 - x_j)$ 对任意的 $i \in [m]$ 均成立，则 $\mathbf{p} \in \mathcal{I}(G_D)$。*



(a) 依赖图　　(b) 事件变量图

图 1.1 SAT 实例 ϕ 对应的依赖图与事件变量图

Shearer (1985) 给出了对 $\mathcal{I}(G_D)$ 的精确刻画。令 $Ind(G_D)$ 表示由图 G_D 的独立集构成的集合，令 $I(G_D,\mathbf{p}) = \sum_{S\in Ind(G_D)}(-1)^{|S|}\prod_{i\in S}p_i$，我们称 $I(G_D,\mathbf{p})$ 为图 G_D 的独立集多项式。则有：

定理 1.2 (Shearer (1985))**.** *给定图 $G_D = ([m],E)$ 和向量 $\mathbf{p}\in(0,1)^m$, $\mathbf{p}\in\mathcal{I}(G_D)$ 当且仅当对于任意的 $S\in Ind(G_D)$, $\sum_{T\supseteq S,T\in Ind(G_D)}(-1)^{|T|-|S|}\prod_{i\in T}p_i > 0$ 成立。如果 $\mathbf{p}\in\mathcal{I}(G_D)$，则任意依赖图为 G_D，概率向量为 $\mathbf{p}$ 的事件集 $\mathcal{A}$ 均满足 $\mathbb{P}\left(\cap_{A\in\mathcal{A}}\overline{A}\right)\geq I(G_D,\mathbf{p})$，且存在事件集使等号成立。*

我们以布尔可满足性问题 (SAT) 为例来看看具体如何使用洛瓦兹局部引理。考虑如下 SAT 实例，$\phi = (x_1\vee\overline{x}_2)\wedge(x_2\vee\overline{x}_3)\wedge(x_3\vee\overline{x}_1)$。考虑如下概率空间，假设 x_1,x_2,x_3 相互独立且对于任意的 $i\in[3]$，$\mathbb{P}(x_i=1)=\mathbb{P}(x_i=0)=\frac{1}{2}$。对于任意的 $i\in[3]$，定义坏事件 A_i 为 ϕ 的第 i 个子句为假。则有 $\mathbb{P}(A_1)=\mathbb{P}(A_2)=\mathbb{P}(A_3)=\frac{1}{4}$。令 $\mathcal{A}=\{A_1,A_2,A_3\}$。则容易验证，$\phi$ 是可满足的当且仅当 $\mathbb{P}\left(\cap_{A\in\mathcal{A}}\overline{A}\right)>0$。

另外，因为 A_1,A_2,A_3 中的任何两个事件都公用一个随机变量，则事件集 $\mathcal{A}$ 对应的依赖图如图1.1 (a) 所示。设该依赖图为 G_D。借助于定理1.1和1.2，我们可以刻画 G_D 的抽象内部，如图1.2所示。其中绿色的点是定理1.1所刻画的 G_D 的抽象内部中的概率向量，蓝色三角形是定理1.2所刻画的 G_D 的抽象边界，即蓝色三角形以下的所有概率向量组成的集合即是 G_D 的抽象内部，$\mathcal{I}(G_D)$。由图1.2可以看到，$(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})\in\mathcal{I}(G_D)$，则由 $\mathcal{I}(G_D)$ 的定义有 $\mathbb{P}\left(\cap_{A\in\mathcal{A}}\overline{A}\right)>0$ 成立，因此 ϕ 可满足。至此，我们借助于洛瓦兹局部引理解决了原始的 SAT 问题。

1.1.1 经典变量版本局部引理

如定理1.1和定理1.2所示，抽象版本局部引理只用到了依赖图和事件的概率。然而，依赖图只给出了事件之间是否存在依赖关系，却没有刻画它们是如何相互依赖的。

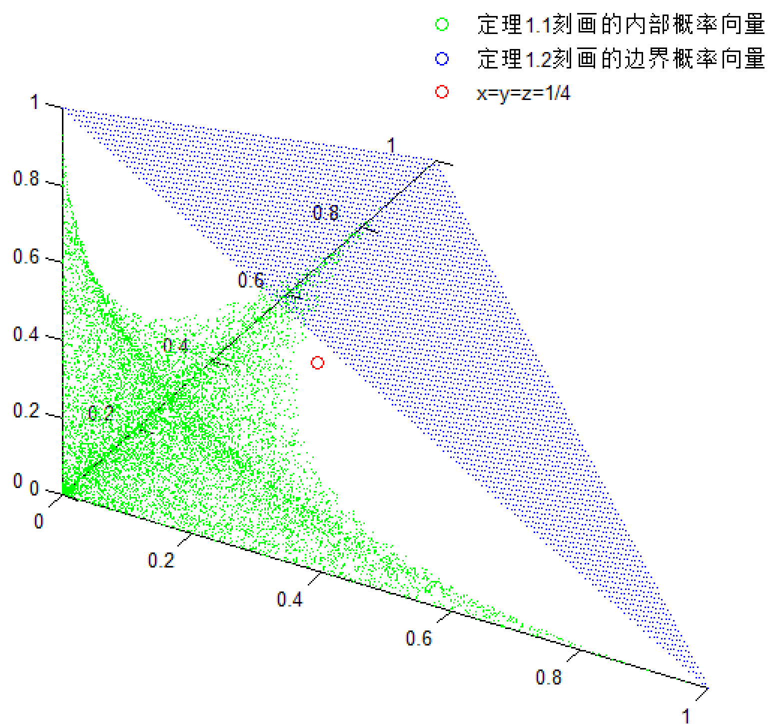


图 1.2 依赖图是三角形时的抽象内部

相比于依赖图，一种提供了更丰富的依赖结构的模型是变量生成的事件系统。在这种模型中，每个事件可以看成是定义在一个由独立随机变量构成的集合上的约束。设事件集 $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_m\}$ 是由变量集 $\mathcal{X} = \{X_1, ..., X_n\}$ 生成的事件系统。这里，每个 X_i 既可以是连续的，也可以是离散的，且所有的变量相互独立。对任意的 $i \in [m]$，令 $\mathcal{X}_i \subseteq \mathcal{X}$ 是由完全决定 A_i 的变量构成的集合。则这个模型可以完全由一个事件-变量图来刻画。一个事件-变量图是一个二部图 $G_B = ([m], [n], E)$。其中，$(i, j) \in [m] \times [n]$ 是图 G_B 的一条边当且仅当 $X_j \in \mathcal{X}_i$。对于 SAT 实例 $\phi = (x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (x_3 \vee \overline{x}_1)$，容易验证其事件-变量图如图1.1 (b) 所示。

我们按如下方式定义事件-变量图的变量内部。

定义 1.2 (二部图的变量内部)**.** 给定事件-变量图 G_B，定义 G_B 的变量内部，$\mathcal{VI}(G_B)$，为

$$\mathcal{VI}(G_B) = \Big\{\mathbf{p} : \text{对于任意的由变量生成的事件系统 } \mathcal{A}\text{，如果其事件-变量图为 } G_B\text{，} \\ \text{概率向量为 } \mathbf{p}\text{，则 } \mathbb{P}\left(\cap_{A\in\mathcal{A}}\overline{A}\right) > 0 \text{ 始终成立。}\Big\}$$

变量版本局部引理（VLLL）就是要给出对 $\mathcal{VI}(G_B)$ 的刻画。

由变量生成的事件系统这一模型之所以重要，是因为绝大多数局部引理的应用，都很自然地包含潜在的独立随机变量，如超图染色 (McDiarmid, 1997), 可满足性问题 (Gebauer 等, 2016, 2009), 约束可满足性问题的计数 (Moitra, 2017), 无环图的边染色 (Giotis 等, 2017), 等等。此外，很多关于局部引理算法化方面的经典结果都是基于这一模型 (参见第2.2节)。然而，对变量版本局部引理的研究并不多。在变量情形下使用局部引理的通常方法是忽略掉变量信息，直接针对依赖图使用抽象版本局部引理。这种方法得到的结果不可能超出 Shearer 界。最近，Harris (2016) 针对 *lopsided* 情形下的变量版本提出了一种能够超出 Shearer 界的条件，但该条件用到了比事件-变量图更多的信息，即不同事件相同变量的取值如何错开。因此，超出 Shearer 界的变量版本局部引理这一问题依然是开放的。

给定一个二部图 $G_B = ([m],[n],E)$，我们称 $[m]$ 中的顶点为左顶点，$[n]$ 中的顶点为右顶点。令 $\mathcal{N}_{G_B}(i)$ 表示顶点 i 在 G_B 中的邻居。在不引起歧义的情况下，我们将用 $\mathcal{N}(i)$ 简记 $\mathcal{N}_{G_B}(i)$。如果两个左顶点 i_1, i_2 满足 $\mathcal{N}(i_1) \cap \mathcal{N}(i_2) \neq \emptyset$，我们称 i_1, i_2 是相邻的。如果左顶点 i 和右顶点 j 满足 $j \in \mathcal{N}(i)$，我们称 i 和 j 是相邻的。我们按如下方式定义二部图的基图。

定义 1.3 (二部图的基图)**.** 给定二部图 $G_B = ([m],[n],E)$，令 $E' = \{(u_1,u_2) : u_1, u_2$ 均为左顶点且 u_1, u_2 是相邻的$\}$。定义 G_B 的基图为 $G_D(G_B) = ([m],E')$。

基图拥有如下性质，如果 G_B 是由变量生成的事件系统 $\mathcal{A}$ 的事件-变量图，则 $G_D(G_B)$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个依赖图。例如，考虑我们之前针对 SAT 实例 $\phi = (x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (x_3 \vee \overline{x}_1)$ 定义的事件集 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$。$\mathcal{A}$ 的事件-变量图是图1.1 (a)，而容易验证图1.1 (a) 的基图就是图1.1 (b)，即事件集 $\mathcal{A}$ 的依赖图。

因此，我们有 $\mathcal{I}(G_D(G_B)) \subseteq \mathcal{VI}(G_B)$。若 $\mathcal{I}(G_D(G_B)) \neq \mathcal{VI}(G_B)$，我们说 Shearer 条件对 G_B 不是紧的，或者二部图 G_B *变量版本与抽象版本有差异*。人们普遍相信，Shearer 条件对变量版本局部引理不是紧的，即存在很多二部图都是有差异的。现在唯一已知的有差异的例子，是基图为长为 4 的圈的二部图 (Kolipaka 和 Szegedy, 2011)。对二部图变量版本与抽象版本有差异的条件目前还没有清楚的刻画。

1.1.2 量子版本局部引理

绝大多数物理学家感兴趣的系统可以用局域哈密尔顿量 $H = \sum_i H_i$ 来刻画，其中，每个 k-局域的项 H_i 最多非平凡地作用在 k 个 qudit 上。如果 H 的基态 $|\phi\rangle$ 同时也是每个 H_i 的基态，我们称 H 是无忧的（frustration free）。令 Π_i 表示向 H_i

的激发态上投影的投影算符，令 $\Pi = \sum \Pi_i$。容易验证，H 是无忧的当且仅当 Π 是无忧的。因此，在本文中，我们只关心那些是投影算符的哈密尔顿量。

无忧的局域哈密尔顿量有零能量的基态。很多量子优化问题都等价于判定一个特定的量子系统是否无忧。而在量子多体物理中，无忧的局域哈密尔顿量更是创造新材料和理解材料的新属性的关键 (Rokhsar 和 Kivelson, 1988; Castelnovo 等, 2005)。

判定一个给定的 Π 是否是无忧的（用计算机科学的语言来说是判定一个给定的 Π 是否是可满足的），是量子可满足性问题。量子可满足性问题是量子复杂性理论的核心议题之一。然而，量子可满足性问题已经被证明是 QMA_1-完全的 (Bravyi, 2011)，人们普遍认为，QMA_1-完全问题即使在量子图灵机模型下也是没有多项式时间算法的。因此，人们希望可以找到高效的启发式方法和能至少部分求解这一问题的算法。

在一篇开创性的工作之中，通过按如下表所示的方式推广概率和独立性等概念，Ambainis 等 (2012) 对依赖图提出了一个量子版本局部引理（QLLL）。利用量子版本局部引理，他们将随机 k-QSAT 问题的临界密度从 $\Omega(1)$ (Laumann 等, 2010) 改进到了 $\Omega(2^k/k^2)$，几乎达到了该问题已知的最优上界 $O(2^k)$ (Laumann 等, 2010)。

$$
\begin{array}{lcl}
\text{概率空间 } \Omega & \to & \text{向量空间 } V \\
\text{事件 } A & \to & \text{子空间 } A \subseteq V \\
\text{概率 } \mathbb{P}(A) & \to & \text{相对维度 } R(A) := \frac{\dim(A)}{\dim(V)} \\
\text{交 } A \wedge B & \to & A \cap B \\
\text{并 } A \vee B & \to & A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\} \\
\text{补 } \overline{A} = \Omega \backslash A & \to & \text{正交补空间 } A^{\perp} \\
\text{条件概率 } \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \wedge B)}{\mathbb{P}(B)} & \to & R(A|B) := \frac{R(A \cap B)}{R(B)} \\
\text{独立性 } \mathbb{P}(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B) & \to & R(A \cap B) = R(A) \cdot R(B)
\end{array}
$$

最近，Sattath 等 (2016) 针对相互作用图将 Shearer 的定理推广到了量子版本局部引理。相互作用图也是一个二部图 $G_B = ([m], [n], E)$，可以看作是经典变量情形下的事件-变量图的量子对应，其中 $[m]$ 中的顶点表示哈密尔顿量，$[n]$ 中的顶点表示 qudit，当一个哈密尔顿量作用在另一个 qudit 上时，则相应的顶点之间连一条边。

依据子空间的相对维度的定义有，哈密尔顿量 $\Pi = \sum \Pi_i$ 是无忧的，即是指

其核 Ker Π 的相对维度 $R(\text{Ker}\,\Pi) > 0$。令哈密尔顿量 Π_i 的相对维度为其象 $\text{Im}\,\Pi_i$ 的相对维度 $R(\text{Im}\,\Pi_i)$。我们按如下方式定义相互作用图的量子内部。

定义 1.4 (二部图的量子内部). 给定相互作用图 G_B，定义 G_B 的量子内部，$\mathcal{QI}(G_B)$，为

$$\mathcal{QI}(G_B) = \Big\{\mathbf{r} : \text{存在一个有理向量 } \mathbf{r}' \geq \mathbf{r} \text{ 使得对于任意的局域哈密尔顿量 } \Pi\text{，若}$$
$$\text{其相互作用图为 } G_B\text{，相对维度为 } \mathbf{r}'\text{，则 } R(\text{Ker}\,\Pi) > 0 \text{ 始终成立。}\Big\}$$

量子版本局部引理（QLLL）就是要给出对 $\mathcal{QI}(G_B)$ 的刻画。对于任意的二部图 $G_B = ([m],[n],E)$ 和 $\mathbf{r} \in (0,1]^m$，令 $I(G_B,\mathbf{r}) = I(G_D(G_B),\mathbf{r})$。Sattath 等 (2016) 证明了 Shearer 界对量子版本局部引理依然是充分的，即

定理 1.3 (Sattath 等 (2016)). *给定二部图 G_B 和有理的相对维度向量 $\mathbf{r}$，如果 $\mathbf{r} \in \mathcal{I}(G_D)$，则对于任意的相互作用图为 G_B，相对维度向量为 $\mathbf{r}$ 的局域哈密尔顿量 Π，有 $R(\ker\Pi) \geq I(G_B,\mathbf{r}) > 0$。*

定理1.3意味着对于任意的二部图 G_B，$\mathcal{I}(G_D(G_B)) \subseteq \mathcal{QI}(G_B)$。值得注意的是，由 Shearer 界算出的概率阈值恰好是硬核晶格气模型配分函数的第一负逸度 (first negative fugacity)，在经典统计力学中已经被反复研究过。结合经典统计力学中的工具，Sattath 等人利用量子版本局部引理计算了多种晶格的无忧临界阈值。与变量版本局部引理相反，Sattath 等 (2016) 猜测 Shearer 界对量子版本局部引理是紧的，即对于任意的二部图 G_B，$\mathcal{I}(G_D(G_B)) = \mathcal{QI}(G_B)$。

这一猜测本身具有重要的物理意义，如果是对的，将导致几个惊人的结论。首先，几何化定理 (Laumann 等, 2009) 说明了几乎所有 qudit 维数足够大的局域哈密尔顿量 Π 对应的 $R(\text{Ker}\,\Pi)$ 取得理论上的极小值。因此，如果 Sattath 等人的猜测是对的，结合几何化定理，我们有晶格气模型的配方函数提供了几乎所有 qudit 维数足够大的哈密尔顿量的量子可满足性问题的完整刻画。同时，晶格气的临界指数可以用来计算无忧区域内几乎所有 qudit 维数足够大的哈密尔顿量的基态熵。这意味着经典统计力学中的相关结论可以直接被迁移到量子复杂性领域。

其次，Gilyén 和 Sattath (2017) 最近设计了一个算法，使得当局域哈密尔顿量满足 Shearer 条件时，算法可以高效地制备一个无忧的量子态。当然，该算法还要求局域哈密尔顿量的*一致差异*（uniform gap）足够大，但这不在本文的讨论范围之内。如果 Sattath 等人的猜测是对的，则意味着 Gilyén 和 Sattath 的算法有效范围是紧的。

1.1.3 对易版本局部引理

在过去的几十年里，一类特殊的量子可满足性问题，即对易局域哈密尔顿量的可满足性问题，因为和量子 PCP 猜想相关，在量子计算领域得到了人们的极大关注 (Bravyi 和 Vyalyi, 2005; Aharonov 和 Eldar, 2011; Schuch, 2011; Gottesman 和 Irani, 2009; Aharonov 等, 2018)。我们将对易局域哈密尔顿量的可满足性问题简称为对易可满足性问题。如果局域哈密尔顿量 $\Pi = \sum \Pi_i$ 满足对于任意的 i 和 j，$[\Pi_i, \Pi_j] = 0$ 成立，则称 Π 为对易的局域哈密尔顿量。对易局域哈密尔顿量，介于经典事件和量子局域哈密尔顿量之间，也能展现出有趣的多粒子纠缠现象，如著名的 toric code (Kitaev, 2003)。

人们之所以对对易的局域哈密尔顿量感兴趣，一方面是因为对易是一种很自然的性质，在物理学的相关研究中经常这样假设。另一方面，研究清楚对易局域哈密尔顿量的能力极限也能帮我们理解非对易在量子力学中的作用。因为经典的 SAT 问题可以看作是对易可满足性问题的一类特例，则对易可满足性问题至少是 NP-难的。因此，我们希望可以找到对易局域哈密尔顿量可满足的充分条件，以部分求解对易可满足性问题。对易版本局部引理即是这样一个充分条件。

我们按如下方式定义相互作用图的对易内部。

定义 1.5 (二部图的对易内部). 给定相互作用图 G_B，定义 G_B 的对易内部，$\mathcal{CI}(G_B)$，为

$$\mathcal{CI}(G_B) = \Big\{ \mathbf{r} : \text{存在有理向量 } \mathbf{r}' \geq \mathbf{r} \text{ 使得对于任意的对易局域哈密尔顿量 } \Pi\text{，若} \\ \text{其相互作用图为 } G_B\text{，相对维度为 } \mathbf{r}'\text{，则 } R(\operatorname{Ker} \Pi) > 0 \text{ 始终成立。} \Big\}$$

对易版本局部引理（CLLL）就是要给出对 $\mathcal{CI}(G_B)$ 的刻画。因为经典的由变量生成的事件系统是对易的局域哈密尔顿量的一类特例，对易的局域哈密尔顿量是量子局域哈密尔顿量的一类特例，我们有对于任意的二部图 G_B，$\mathcal{QI}(G_B) \subseteq \mathcal{CI}(G_B) \subseteq \mathcal{VI}(G_B)$。但 $\mathcal{QI}(G_B) \subset \mathcal{CI}(G_B)$ 和 $\mathcal{CI}(G_B) \subset \mathcal{VI}(G_B)$ 是否对某些 G_B 成立，目前还不清楚。研究清楚三者之间是否存在真包含关系，可以帮助我们理解对易的能力以及非对易在量子力学中的作用。

有一系列工作研究给定满足某种对易版本局部引理条件的对易局域哈密尔顿量，如何高效地制备一个无忧的量子态 (Schwarz 等, 2013; Cubitt 和 Schwarz, 2012; Sattath 和 Arad, 2015)。Gilyén 和 Sattath (2017) 针对一般的局域哈密尔顿量的算法显然也可以应用到对易的局域哈密尔顿量上。

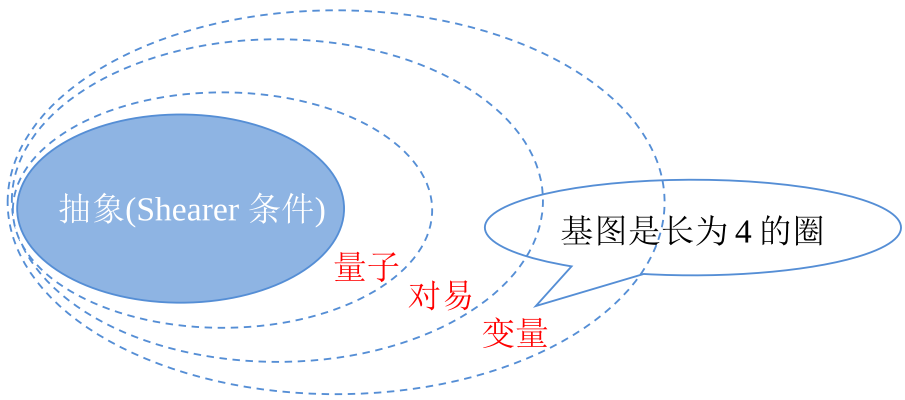


图 1.3 变量、对易与量子版本局部引理的研究现状

1.1.4 小结

综上所述，目前变量、对易与量子版本局部引理的研究现状如图1.3所示。目前已知对于任意的二部图 G_B，$\mathcal{I}(G_D(G_B)) \subseteq \mathcal{QI}(G_B) \subseteq \mathcal{CI}(G_B) \subseteq \mathcal{VI}(G_B)$。同时，还存在一个唯一的例子，即基图是长为 4 的圈的二部图，其变量版本与抽象版本有差异。但变量、对易与量子版本局部引理的紧的条件都还不清楚。

1.2 研究内容与挑战

因此，本文主要关心以下四个方面的问题：

1. 变量版本局部引理的紧的条件：即对任意一个二部图 G_B，给出对 $\mathcal{VI}(G_B)$ 的刻画。Kolipaka 和 Szegedy (2011) 等人已经证明了 Moser-Tardos 算法在 Shearer 界之内是高效的。然而，该算法在 Shearer 界之外是否也高效收敛还不清楚。进一步地，Moser-Tardos 算法是否在变量版本局部引理的紧的界之内都高效收敛也还不清楚。同时，人们普遍认为，借助于变量版本局部引理，对于很多组合问题，我们能得到比借助于抽象版本局部引理更好的界。然而，相关的界到底能好多少还不清楚。回答这些问题的一个先决条件就是要刻画清楚变量版本局部引理的紧的条件。

2. 量子版本局部引理的紧的条件：即对任意一个二部图 G_B，给出对 $\mathcal{QI}(G_B)$ 的刻画。如果能给出量子版本局部引理的紧的条件，就能回答从Ambainis 等 (2012) 提出量子版本局部引理以来领域内一直悬而未决的问题，并为研究量子可满足性问题提供新的工具。同时，也能回答Sattath 等 (2016) 的猜测，为计算晶格的无忧临界阈值提供新的方法。

3. 对易版本局部引理的紧的条件：即对任意一个二部图 G_B，给出对 $\mathcal{CI}(G_B)$ 的刻画。如果能给出对易版本局部引理的紧的条件，就能为研究对易可满足性

问题提供新的工具。我们知道Gilyén 和 Sattath (2017) 的算法在 Shearer 界以内都是快速收敛的，一个有趣的问题是该算法对于对易的局域哈密尔顿量在 Shearer 界以外是否也高效收敛。该问题可以看作是之前提到的重要开放问题，Moser-Tardos 算法在 Shearer 界之外是否也高效收敛，的对易版本，是对原问题的扩充。回答这一问题的一个先决条件就是要回答 Shearer 界对对易版本局部引理是否是紧的。

4. 不同版本局部引理之间的关系。依据前述内容，容易验证，对于任意的二部图 G_B，有 $\mathcal{I}(G_D(G_B)) \subseteq \mathcal{QI}(G_B) \subseteq \mathcal{CI}(G_B) \subseteq \mathcal{VI}(G_B)$。但 $\mathcal{I}(G_D(G_B)) \subset \mathcal{QI}(G_B)$，$\mathcal{QI}(G_B) \subset \mathcal{CI}(G_B)$ 和 $\mathcal{CI}(G_B) \subset \mathcal{VI}(G_B)$ 是否对某些 G_B 成立，目前还都不清楚。研究这些局部引理之间的真包含关系，对于理解经典变量、对易和量子之间的能力差异，理解对易的能力极限以及非对易在量子力学中的作用，都有重要意义。

1.3 本文的贡献

本文对变量版本、量子版本与对易版本局部引理进行了研究，得到了以下结果。

1.3.1 变量版本局部引理的主要结果

首先，我们给出了变量版本局部引理的紧的条件，即对任何一个二部图 G_B，给出了其变量内部 $\mathcal{VI}(G_B)$ 的刻画。对 G_B 变量内部的刻画等价于确定 G_B 的变量边界，$\mathcal{V}\partial(G_B)$，这里一个向量 $\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$ 当且仅当对于任意的 $\epsilon \in (0,1)$ 有 $(1-\epsilon)\mathbf{p} \in \mathcal{VI}(G_B)$ 和 $(1+\epsilon)\mathbf{p} \notin \mathcal{VI}(G_B)$ 成立。我们用一个数学规划给出了 $\mathcal{V}\partial(G_B)$ 的精确刻画，该数学规划本质上说明了在给定事件集的概率向量 $\mathbf{p}$ 和事件-变量图时，存在一个事件集，其每个变量 j 的取值不超过 $\mathcal{N}(j)+1$ 种，且该事件集中所有事件并起来的概率取得最大值。

同时，我们还证明了，给定一个二部图 G_B 和向量 $\mathbf{p}$，判定 $\mathbf{p}$ 是否属于 $\mathcal{VI}(G_B)$ 是 #P-难的。

其次，我们显式地给出了两类二部图，即树和圈，的变量边界。这是变量版本局部引理的边界首次在某类非平凡的二部图上被刻画清楚。树是最简单的二部图，从抽象、对易和量子版本局部引理的角度有很多相关的研究 (Movassagh 等, 2010; Shearer, 1985; Heilmann 和 Lieb, 1972; Coudron 和 Movassagh, 2012; Sattath 等, 2016)。圈是领域内学者关心的热点，因为目前唯一已知的变量版本和抽象版

本有差异的二部图其基图是长为 4 的圈 (Kolipaka 和 Szegedy, 2011)，因此，不失一般性，可认为该二部图是一个长度为 8 的圈。详细分析可参见第3.3节。

之后，我们给出了二部图抽象版本和变量版本局部引理相同的充分必要条件。对于一个给定的二部图，该条件使得我们既不必求解 Shearer 条件，也不必求出变量版本的边界，即可判定两类边界是否相同。借助该条件我们证明了，如果一个二部图是树，则其抽象版本和变量版本局部引理相同。如果一个二部图的基图不是弦图，则其抽象版本和变量版本局部引理不同。这一结果验证了人们长久以来的猜测，即一般而言，变量版本局部引理与抽象版本局部引理是不同的。

最后，我们还从依赖图出发研究了变量版本与抽象版本是否有差异。给定一个依赖图 G_D，如果任何一个基图是 G_D 的二部图都是有差异的，我们称 G_D 是强有差异的，否则我们称它不是强有差异的。我们证明了一个图是强有差异的当且仅当它不是弦图，从而解决了Kolipaka 和 Szegedy (2011) 提出的开放问题。

本部分内容已经发表在理论计算机顶会 FOCS 上 (He 等, 2017)。

1.3.2 量子版本局部引理的主要结果

我们证明了 Shearer 界对量子版本局部引理是紧的，即 $\mathcal{I}(G_D(G_B)) = \mathcal{QI}(G_B)$，从而证明了Sattath 等 (2016) 和Morampudi 和 Laumann (2018) 的猜想。

定理 1.4 (非形式化版本). *给定二部图 G_B 和有理的相对维度向量 $\mathbf{r}$，考虑那些相互作用图是 G_B，相对维度向量是 $\mathbf{r}$ 的局域哈密尔顿量。如果 $\mathbf{r} \in \mathcal{I}(G_D(G_B))$，则*

- *所有局域哈密尔顿量 Π 均满足 $R(\ker \Pi) \geq I(G_B, \mathbf{r}) > 0$ (Sattath 等, 2016)。*
- *当 qudit 的维度合适时，作用在这些 qudit 上的几乎所有局域哈密尔顿量 Π 均满足 $R(\ker \Pi) = I(G_B, \mathbf{r}) > 0$。*
- *存在向量 $\mathbf{d}_0$ 使得对所有维度 $\mathbf{d} \geq \mathbf{d}_0$ 的 qudit，作用在这些 qudit 上的几乎所有局域哈密尔顿量 Π 均满足 $R(\ker \Pi) \leq I(G_B, \mathbf{r}) + \epsilon$，其中 ϵ 是一个与 $\mathbf{d}_0$ 有关的常数，当 $\mathbf{d}_0$ 趋于无穷时，ϵ 可以任意小。*

否则，有

- *当 qudit 的维度合适时，作用在这些 qudit 上的几乎所有局域哈密尔顿量 Π 均满足 $R(\ker \Pi) = 0$。*
- *存在向量 $\mathbf{d}_0$ 使得对所有维度 $\mathbf{d} \geq \mathbf{d}_0$ 的 qudit，作用在这些 qudit 上的几乎所有局域哈密尔顿量 Π 均满足 $R(\ker \Pi) \leq \epsilon$，其中 ϵ 是一个与 $\mathbf{d}_0$ 有关的常数，当 $\mathbf{d}_0$ 趋于无穷时，ϵ 可以任意小。*

如之前所述，上述定理意味着，当 qudit 的维度足够大时，晶格气模型的配方函数的第一负逸度即是几乎所有局域哈密尔顿量的量子可满足性问题的临界阈值，同时，这些局域哈密尔顿量的核的相对维度可以由独立集多项式 $I(G_B, \mathbf{r})$ 完美刻画。这一定理还意味着Gilyén 和 Sattath (2017) 的算法对一般的局域哈密尔顿量是紧的。

Morampudi 和 Laumann (2018) 独立地证明了对一大类二部图，Shearer 界对量子版本局部引理是紧的。这里，我们证明了对于所有的二部图，Shearer 界都是紧的。

本部分内容已经发表在理论计算机顶会 STOC 上 (He 等, 2019)。

1.3.3 对易版本局部引理的主要结果

我们借助结构引理 (Bravyi 和 Vyalyi, 2005) 证明了对一大类二部图，其对易版本局部引理和变量版本局部引理相同。由此，我们可以将变量版本局部引理的很多结论推广到对易版本局部引理。因为树和圈都在这类二部图之中，因此，从树和圈的变量边界可以很容易地得到树和圈的对易边界。对于二部图是树的情况，我们还针对不同的 qudit 维度计算了局域哈密尔顿量的对易边界。同时，我们证明了如果一个二部图是树，则其抽象版本和对易版本局部引理相同。如果一个二部图的基图不是弦图，则其抽象版本和对易版本局部引理不同。

我们的结果说明了，Shearer 界对对易版本局部引理不是紧的。因此，对于对易的局域哈密尔顿量，Gilyén 和 Sattath (2017) 的算法在 Shearer 界以外有可能也是高效的。因为 Shearer 界对量子版本局部引理是紧的，则一般而言，量子版本局部引理与对易版本局部引理是不同的，这是又一个量子和对易能力不同的例子。

本部分内容已经发表在理论计算机顶会 STOC 上 (He 等, 2019)。

1.3.4 小结

综上所述，本文的研究工作系统地改变了局部引理领域的研究现状，如图1.4所示。我们证明了 Shearer 条件对量子版本局部引理是紧的，给出了变量版本局部引理紧的条件，同时还证明了对易版本局部引理同量子版本不同。目前只有对易版本局部引理紧的条件还没刻画清楚。

我们的工作进一步阐明了不同版本局部引理之间的关系，即对于任意的二部图 G_B，$\mathcal{I}(G_D(G_B)) = \mathcal{QI}(G_B) \subseteq \mathcal{CI}(G_B) \subseteq \mathcal{VI}(G_B)$。且存在二部图 G_B，使得 $\mathcal{QI}(G_B) \subset \mathcal{CI}(G_B)$。是否存在二部图 G_B，使得 $\mathcal{CI}(G_B) \subset \mathcal{VI}(G_B)$ 还不清楚。

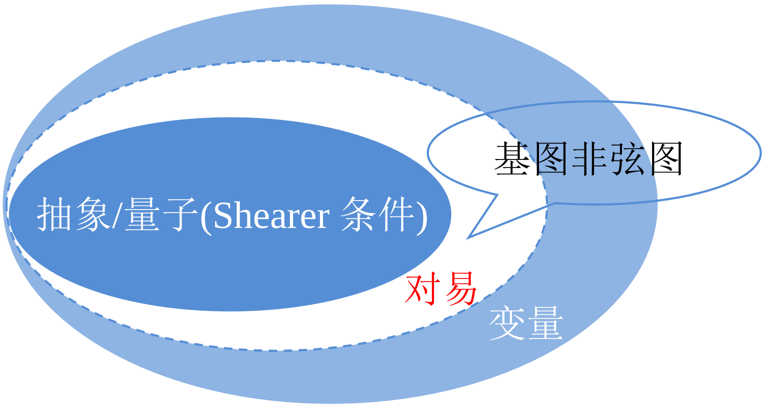


图 1.4 本文的研究结果

1.4 本文的组织结构

本文后续部分安排如下。第2章介绍近年来洛瓦兹局部引理研究的主要进展。本文第3章对变量版本局部引理展开研究，将依次给出变量版本局部引理紧的条件，树和圈的边界，二部图变量版本与抽象版本有差异的充分必要条件等结果。本文第4章对量子版本局部引理展开研究，将给出量子版本局部引理紧的条件。第5章对对易版本局部引理展开研究，将首先介绍一些证明的工具，之后再证明对易版本局部引理可以超出 Shearer 界。最后，本文第6章对全文进行回顾，并提出一些开放问题。

第 2 章　洛瓦兹局部引理的研究现状

本章我们介绍洛瓦兹局部引理的研究现状，主要涉及经典的抽象版本与变量版本局部引理，量子版本与对易版本局部引理，以及近年来在局部引理的算法化方面取得的进展。

2.1　经典局部引理

洛瓦兹局部引理是证明满足一系列约束的组合对象存在的有力工具。Erdős 和 Lovász (1975) 证明了第一个抽象版本局部引理，而Spencer (1977) 提出了第一个非对称的局部引理，即定理1.1。这些结果都是非常有用的工具，可惜的是它们都不是紧的。抽象版本局部引理紧的条件，即定理1.2，是由Shearer (1985) 在 30 多年之前证明的。

Shearer 条件中涉及到了一个依赖图的所有独立集，往往很难验证。因而，人们试图找到一些虽然更弱但更简单易用的条件。Pegden (2011, 2012) 引入了*左手局部引理*，该引理虽然不适用于某些依赖图，但它往往比定理1.1中所给出的条件要紧，同时对某些依赖图，如弦图，该引理提供了一个简单的紧的条件。除了上述只适用于部分依赖图的条件，人们还得到了很多适用于所有依赖图的条件。Bissacot 等 (2011) 提出了*团扩张局部引理*，改进了定理1.1中的结果。Kolipaka 等 (2012) 也引入了一系列条件，如*团局部引理*，得到了比定理1.1中更紧的界。上述这些条件要么只适用于部分依赖图，要么对于有些依赖图不是紧的。

为了将局部引理应用到事件之间负相关的情况，Erdős 和 Spencer (1991) 引入了 *lopsided 局部引理*。令 $\Gamma_i^+ = \Gamma_i \cup \{i\}$。我们称一个无向图 $G_D = ([m], E)$ 是事件集 $\mathcal{A}$ 的一个 lopsided 依赖图，当且仅当对于任意的顶点 $i \in [m]$ 和任意的集合 $K \subseteq [m] \setminus \Gamma_i^+$，$\mathbb{P}(A_i | \bigcup_{k \in K} A_j) \geq \mathbb{P}(A_i)$ 成立。可以证明，定理1.1对于 lopsided 依赖图也是成立的。Scott 和 Sokal (2006) 证明了 Shearer 条件对 lopsided 依赖图也是紧的。自 1991 年提出之后，lopsided 局部引理在组合数学和理论计算机领域已经有了很多有趣的应用 (Gebauer 等, 2016; Lu 和 Szekely, 2009)。

局部引理同统计物理之间存在着有趣的联系。定理1.2中用于刻画抽象版本局部引理紧的条件的独立集多项式，即是统计物理中硬核晶格气模型的配分函数 (Scott 和 Sokal, 2005; Guttmann, 1987; Todo, 1999; Wood, 1985)。Scott 和 Sokal (2006) 给出了 Shearer 条件的很多等价形式。受到这种联系的启发，Bissacot 等

(2011) 提出了团扩张局部引理。

2.2 局部引理的算法化

如第2.1节所述，洛瓦兹局部引理是证明满足一系列约束的复杂组合对象存在的重要工具。有时候，除了希望证明这种组合对象存在，我们还希望可以高效地找到这些对象。因此，人们研究了构造性局部引理，提出了各种各样的可以避开所有坏事件的算法。

构造性局部引理的算法设计往往同之前提到的局部引理的界有关。Beck (1991) 首次给出了一个构造性局部引理。他提出了一个高效的确定性的算法用来找到避开所有坏事件的赋值，该算法当依赖图 $G_D = ([m], E)$ 的度不超过 $2^{m/48}$ 时是多项式的。之后有一系列工作试图来弱化这一条件 (Czumaj 和 Scheideler, 2000; Molloy 和 Reed, 1998; Radhakrishnan 和 Srinivasan, 1998; Salavatipour, 2004)。

在由变量生成的事件系统这一模型下，Moser 和 Tardos (2010) 提出了一个简单的基于采样的拉斯维加斯算法。他们的算法期望时间是多项式的，当算法停止时，会输出可以避开所有坏事件的对所有随机变量的赋值。从渐进意义而言，Moser-Tardos 算法对 k-SAT 问题是紧的 (Moser 和 Tardos, 2010; Gebauer 等, 2016)。

尽管使用了比依赖图更强的变量模型，Moser 和 Tardos 只能证明在定理1.1的条件下，他们的算法是多项式的。但定理1.1对抽象版本局部引理都不是紧的，对变量版本局部引理更是如此。因此，构造性局部引理的适用范围还可以进一步扩展。Pegden (2014) 证明了 Moser-Tardos 算法在团扩展局部引理的范围内都是快速收敛的。Kolipaka 和 Szegedy (2011) 进一步证明了在变量模型下，Moser-Tardos 算法在 Shearer 条件之内都是快速收敛的。Harris (2016) 针对 lopsided 情形的变量模型提出了一个算法，并证明在 Shearer 条件之外的某些情况，该算法依然是快速收敛的。一个重要的开放性问题是在变量模型下构造性局部引理的紧的条件是什么。(Catarata 等, 2017) 通过实验发现 Moser-Tardos 算法很有可能在 Shearer 条件之外依然是快速收敛的。

通过从当前发生的坏事件中选出一组完全相互独立，即没有共用变量的事件，并独立地对这些事件涉及的变量进行采样，Moser-Tardos 算法可以很自然地并行化。Moser 和 Tardos 证明了并行算法可以获得更优的期望运行时间，但这里所用到的条件也比分析串行算法的条件要略强。事实上，人们很早就开始考虑构造性局部引理的并行化 (Alon, 1991)。最近，研究者们提出了一些新的并行的

算法，这些算法要么比并行版 Moser-Tardos 算法更快，要么需要的条件比并行版 Moser-Tardos 算法更弱 (Haeupler 和 Harris, 2017; Harris, 2017)。另外，也有学者在分布式计算的模型上研究构造性局部引理 (Brandt 等, 2016; Chung 等, 2014; Ghaffari, 2016)。

除了在由变量生成的事件系统这一模型下研究构造性局部引理，也有人研究其他模型下的构造性局部引理。Harris 和 Srinivasan (2014) 考虑了针对排列的构造性局部引理。Achlioptas 和 Iliopoulos (2016b) 考虑了基于随机游走的构造性局部引理。之后，人们进一步把构造性局部引理的研究扩展到了存在 resampling oracles 的情况 (Achlioptas 和 Iliopoulos, 2016a; Harvey 和 Vondrák, 2015; Kolmogorov, 2016)。

2.3 量子版本与对易版本局部引理

Ambainis 等 (2012) 仿照经典的非对称的抽象版本局部引理，即定理1.1，对依赖图提出了第一个量子版本局部引理。之后，Sattath 等 (2016) 针对相互作用图考虑量子版本局部引理，并证明了 Shearer 条件对量子版本局部引理依然是充分的。之后，有一系列工作 (Schwarz 等, 2013; Cubitt 和 Schwarz, 2012; Sattath 和 Arad, 2015) 尝试将量子版本局部引理算法化，但这些算法都只对对易的局域哈密尔顿量适用，同时，这些算法要求的局部引理的条件也比 Shearer 条件要强。Gilyén 和 Sattath (2017) 给出了第一个对量子局域哈密尔顿量适用的算法。同时，只要局域哈密尔顿量满足 Shearer 条件，算法就可以高效地制备一个无忧的量子态。

第 3 章　变量版本局部引理

本章将给出变量版本局部引理紧的条件，并讨论哪些二部图变量版本与抽象版本有差异。

为了陈述的简洁性，当一个二部图 G_B 是一个由变量生成的事件系统 $\mathcal{A}$ 的事件-变量图时，我们说 $\mathcal{A}$ 同 G_B 是一致的，即 $\mathcal{A} \sim G_B$。

在本章中，不失一般性，我们仅考虑那些基图是连通图的二部图。如果一个二部图的基图是不连通的，那这个二部图本身一定也是不连通的，且它的每个连通分量依然可以被看作一个二部图。此时，原始二部图的变量内部即是这些连通分量对应的二部图的变量内部的直积。

3.1　变量版本局部引理的几何视角

在本节中，我们将给出变量版本局部引理的几何视角。考虑一个 n 维的欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 以及其上嵌入的勒贝格测度 μ。对任意的 $i \in [n]$，令 X_i 为其第 i 维对应的坐标变量。对任意的 $S \subseteq [n]$，我们用 $\mathbb{I}^S$ 表示由随机变量 $\{X_i \in [0,1] : i \in S\}$ 的值域所定义的 $|S|$ 维单位超立方体，$[0,1]^{|S|}$。当对某个 $k \le n$，$S = [k]$ 成立时，我们用 $\mathbb{I}^k$ 来简记 $\mathbb{I}^{[k]}$。$\mathbb{I}^n$ 中的一个*柱体*，A，是 $\mathbb{I}^n$ 的一个形式如 $B \times \mathbb{I}^S$ 的子集。我们称 $B \subseteq \mathbb{I}^{[n]\setminus S}$ 为柱体 A 的基底。令 $\dim(B) = [n] \setminus S$。

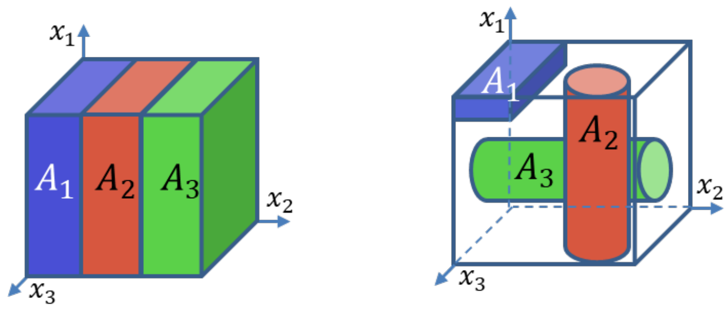
给定一个二部图 $G_B = ([m],[n],E)$ 和一个 $\mathbb{I}^n$ 中的柱体 $A_1,\ldots,A_m$ 构成的集合 $\mathcal{A}$，我们称 $\mathcal{A}$ 同 G_B *一致*，当且仅当存在 $A_1,\ldots,A_m$ 的一组基底 $B_1,\ldots,B_m$ 使得 $E = \{(i,j) \in [m] \times [n] : j \in \dim(B_i)\}$ 成立。我们还是用 $\mathcal{A} \sim G_B$ 来表示 $\mathcal{A}$ 同 G_B 一致。给定一个二部图 G_B，定义 $\mathcal{VI}(G_B)$ 为

$$\mathcal{VI}(G_B) = \Big\{\mathbf{p} : \text{对于任意的柱体 } \mathcal{A}\text{，如果 } \mathcal{A} \sim G_B \text{ 且 } \mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}, \\ \text{则 } \mu(\cup_{A \in \mathcal{A}} A) < 1 \text{ 始终成立。}\Big\}$$

不难看出，上述定义和定义1.2是一致的。

接下来，在本文中，我们将通过几何视角来研究变量版本局部引理。为了便于理解，术语“事件”和“柱体”，“概率”和“勒贝格测度”将被无差别的使用。柱体 A 在 $\mathbb{I}^{[n]}$ 中的补被定义为柱体 $\overline{A} = \mathbb{I}^{[n]} \setminus A$。

为了说明几何化视角的威力，我们将从几何角度证明图1.1 (b) 所示的二部图 G_B 变量版本与抽象版本有差异。图1.1 (b) 所示的三个事件 A_1, A_2, A_3 都可以



(a) 依赖图　　(b) 事件变量图

图 3.1 图1.1中事件集的几何化视角

看作是三维单位立方体中的柱体，如图3.1 (b) 所示。其中 A_1 因为只和变量 x_1, x_2 有关，和变量 x_3 独立，因而可以看作是从 x_1Ox_2 坐标平面延伸出来的柱体。类似的，A_2 和 A_3 可以分别看作是从 x_2Ox_3 和 x_1Ox_3 坐标平面延伸出来的柱体。令 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$。则 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) < 1$ 等价于这三个柱体没有撑满整个单位立方体。从几何直觉上容易验证，当这三个柱体撑满整个单位立方体时，它们必然有相交，因此，当 $\sum_i \mu(A_i) = 1$ 时，必然有 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) < 1$。因此，我们有 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \in \mathcal{VI}(G_B)$。另一方面，容易验证，图3.1 (a) 所示的三个事件，其依赖图就是图1.1 (a)，即 $G_D(G_B)$。因而，当 $\sum_i \mu(A_i) = 1$ 时，存在依赖图为 $G_D(G_B)$ 的事件集 $\mathcal{A}$，使得 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) = 1$。因此，我们有 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \notin \mathcal{I}(G_D(G_B))$。又因为 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \in \mathcal{VI}(G_B)$，我们有 $\mathcal{I}(G_D(G_B)) \neq \mathcal{VI}(G_B)$。

3.2　变量版本局部引理的概率边界

在本节中，我们将变量版本局部引理紧的条件，即给出 $\mathcal{VI}(G_B)$ 的精确数学刻画。

3.2.1　变量版本局部引理的充要条件

定义 3.1 (二部图的变量外部). 二部图 $G_B = ([m], [n], E)$ 的变量外部，$\mathcal{VE}(G_B)$，定义为集合 $(0, 1]^m \setminus \mathcal{VI}(G_B)$。

定义 3.2 (二部图的变量边界). 二部图 $G_B = ([m], [n], E)$ 的变量边界，$\mathcal{V}\partial(G_B)$，定义为

$$\mathcal{V}\partial(G_B) = \Big\{\mathbf{p} \in (0, 1]^m : \text{对于任意的 } \epsilon \in (0, 1)，(1-\epsilon)\mathbf{p} \in \mathcal{VI}(G_B) \\ \text{且 } (1+\epsilon)\mathbf{p} \notin \mathcal{VI}(G_B)\Big\}。$$

我们称 $\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$ 为 G_B 的一个变量边界向量。

可以证明，在每一个方向上都存在一个变量边界向量。

引理 3.1. 给定二部图 $G_B = ([m],[n],E)$，对于任意的 $\mathbf{p} \in (0,1]^m$，存在一个唯一的 $\lambda > 0$ 使得 $\lambda\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$ 成立。

证明. 令 $\Lambda \triangleq \{\lambda > 0 : \lambda\mathbf{p} \notin \mathcal{V}\mathcal{I}(G_B)\}$。如果 λ 很大使得 $\lambda p_i \geq 1$ 对某个 i 成立，则 $\lambda \in \Lambda$ 因为 $\lambda\mathbf{p} \notin \mathcal{V}\mathcal{I}(G_B)$。如果 λ 很小使得 $\lambda \sum_i p_i < 1$，则 $\lambda \notin \Lambda$ 因为 $\lambda\mathbf{p} \in \mathcal{V}\mathcal{I}(G_B)$。因此，$\Lambda$ 非空，并且它的下确界，λ_0，一定为正。容易验证 $\lambda_0\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$。唯一性是显然的。 □

在本节中，我们将提出一个数学规划，来刻画二部图的变量边界。这一规划的核心观察是柱体可以在不改变总体积的前提下被很好地“离散化”。

给定一个整数 $d > 0$, 如果存在一个将 $\mathbb{I}^{\{j\}}$ 分成 d 个互斥区间 $\Delta_1, ..., \Delta_d$ 的划分，使得 $A = \cup_{k=1}^{d} S_k^A \times \Delta_k$ 对于某个 $\{S_k^A \subseteq \mathbb{I}^{[n]\setminus\{j\}} : k = 1, \ldots, d\}$ 成立，我们称柱体 $A \subseteq \mathbb{I}^n$ 在维度 j 上是 $d-$ 离散的。如果任意的 $A \in \mathcal{A}$ 在维度 j 上都是 $d-$ 离散的，我们称柱体集 $\mathcal{A}$ 在维度 j 上是 $d-$ 离散的。当 d 是隐含的时，我们简称 $\mathcal{A}$ 在维度 j 上是离散的。

给定一个向量 $\mathbf{d} = (d_1, ..., d_n)$，一个柱体 A 称为 $\mathbf{d}$-离散当且仅当对于任意的 $j \in [n]$，A 在维度 j 上是 d_j- 离散的。类似的，如果所有的事件 $A \in \mathcal{A}$ 都是 $\mathbf{d}$-离散的，我们称 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbf{d}$-离散的，并且称 $\mathbf{d}$ 为 $\mathcal{A}$ 的离散度。当 $\mathbf{d}$ 是隐含的时，我们简称 $\mathcal{A}$ 是离散的。

给定两个等长度的向量 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$，如果“$\leq$”对于向量的每一维都成立，我们称 $\mathbf{p} \leq \mathbf{q}$。另外，当 $\mathbf{p}$ 的某一元素严格小于 $\mathbf{q}$ 的对应元素时，我们称 $\mathbf{p} < \mathbf{q}$。

在本节的其余部分，我们将假设给定了一个二部图 $G_B = ([m],[n],E)$ 和一个概率向量 $\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$。对于任意的实数 $\epsilon > 0$，令 $\mathbf{q}_\epsilon \triangleq \phi((1+\epsilon)\mathbf{p})$。令 $\mathbf{d} \triangleq (d_1, ..., d_n)$，其中 d_j 是顶点 $j \in [n]$ 在图 G_B 中的度。

本节的主要结果，定理3.6和定理3.7，对每个变量边界向量构造了一个离散的柱体集。从而，我们顺带证明了变量边界向量一定不属于二部图的变量外部。由这两个定理，我们可以得到关于如何对二部图变量内部的概率向量以及变量外部的概率向量进行离散化的两个推论。

变量边界向量的离散化分为四步，接下来我们将分别用四个引理来说明。第一步，我们将证明，对于任意的 $\epsilon > 0$，存在着一个离散的柱体集，它对应的测

度向量在二部图 H 的变量外部，且满足 ϵ-close to $\mathbf{p}$。然而，这个柱体集的离散度依赖于 ϵ，因而当 ϵ 趋于 0 的时候，离散度趋于无穷。第二步，我们将证明存在一个离散度不超过 $\mathbf{d}$ 柱体集，使得 $\mathbf{q}_\epsilon$ 是该柱体集对应的测度向量的上界。然而，$\mathbf{p}$ 不是这个柱体集对应的测度向量的一个下界。第三步，当 ϵ 趋于 0 的时候，一个数学规划和基于微积分的论证保证了存在一个离散度是 $\mathbf{d}$ 柱体集，它对应的测度向量在 H 的变量外部，且 $\mathbf{p}$ 是该测度向量的一个上界。第四步，我们将证明这个柱体集对应的测度向量刚好是 $\mathbf{p}$，从而证明本节的主定理。

证明如下引理的基本思想是一维一维地将柱体的维度离散化。为了离散化第 j 维，我们将 $\mathbb{I}^{\{j\}}$ 这一轴划分为很多小区间，使得在每个小区间里，每个柱体的变化都很少。因此，第 j 维离散化后的柱体可以看作是对原来柱体的一个近似。构造划分的本质是通过有限次求和来近似积分。

引理 3.2. *对于任意的 $\epsilon > 0$，存在着一个离散化的柱体集 $\mathcal{A} \sim G_B$，使得 $\mathbf{p} \le \mu(\mathcal{A}) \le \mathbf{q}_\epsilon$ 且 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) = 1$。*

证明. 因为 $\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$，我们有存在一个柱体集 $\mathcal{A}' \sim G_B$ 使得 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}'}A) = 1$ 且 $\mu(\mathcal{A}') = \mathbf{q}_{\epsilon/2}$。

为了证明本引理，我们只需证明如下断言。

断言: 假设存在一个柱体集 $\mathcal{B} \sim G_B$ 使得 $\mu(\cup_{B\in\mathcal{B}}B) = 1$ 且 $\mathbf{q}_\sigma \le \mu(\mathcal{B}) \le \mathbf{q}_{\epsilon-\sigma}$ 对于某个 $0 < \sigma < \epsilon/2$ 成立。则存在一个离散的柱体集 $\mathcal{A} \sim G_B$ 使得 $\mathbf{p} \le \mu(\mathcal{A}) \le \mathbf{q}_\epsilon$ 且 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) = 1$。

对断言的证明: 任意选定一个满足断言条件的柱体集 $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_m\}$。令 $\mathcal{J} = \{j \in [n] : \mathcal{B}$ 在维度 j 上是离散的$\}$。我们将通过对 $|\mathcal{J}|$ 做归纳来证明断言。

归纳基础: $|\mathcal{J}| = n$。断言显然成立。

归纳假设: 断言在 $|\mathcal{J}| > l$ 时成立。

归纳: 考虑 $|\mathcal{J}| = l < n$。

不失一般性，假设 $1 \notin \mathcal{J}$。

对于任意的 $i \in [m]$ 和 $x \in [0,1]$，令 $B_i^{(x)} = B_i \cap (X_1 = x)$。由 Fubini 定理有，$B_i^{(x)}$ 对几乎所有的 $x \in [0,1]$ 都是勒贝格可测的。不失一般性，假设 $B_i^{(x)}$ 对所有的 $x \in [0,1]$ 都是勒贝格可测的。令 f_i 是定义在 $[0,1]$ 的满足 $f_i(x) = \mu(B_i^{(x)})$ 的勒贝格可测函数。则我们有 $\mu(B_i) = \int_{[0,1]} f_i(x)d\mu$ 成立。注意，这里所使用的积分是勒贝格积分。

令 $p_0 = \min_{i\in[m]} p_i$，$\delta = \frac{\sigma}{2}p_0$。对于任意的整数 $1 \le k \le \lceil\frac{1}{\delta}\rceil$，考虑区间

$$\Lambda_k \triangleq \begin{cases} ((k-1)\delta, \min\{k\delta, 1\}] & \text{if } k > 1 \\ [0, \delta] & \text{if } k = 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

对于任意的整数序列 $1 \le k_1, ..., k_m \le \lceil\frac{1}{\delta}\rceil$，定义集合 $\Delta_{k_1,...,k_m} = \cap_{i\in[m]} f_i^{-1}(\Lambda_{k_i})$。将那些测度非 0 的 Δ 按任意一种方式重新编号成 $\Delta_1, \cdots, \Delta_K$，其中 $K \le \lceil\frac{1}{\delta}\rceil^m$。则我们有如下观察：

1. $\cup_{i\in[K]}\Delta_i \subseteq [0,1]$，且 $\mu(\cup_{i\in[K]}\Delta_i) = 1$；
2. $\Delta_1, \cdots, \Delta_K$ 两两互斥；
3. 对于任意的 $k \in [K]$，$x, x' \in \Delta_k$ 和 $i \in [m]$，$|f_i(x) - f_i(x')| \le \delta$ 成立。

因为 $\mu(\cup_{i\in[m]}B_i) = 1$，对于任意的 $k \in [K]$，我们可以找到一个 $x_k \in \Delta_k$ 使得 $\mu(\cup_{i\in[m]}B_i^{(x_k)}) = 1$ 成立。

将 $\mathbb{I}^{\{1\}}$ 划分成 K 个离散的区间 $\Delta'_1, ..., \Delta'_K$ 使得 $\mu(\Delta'_k) = \mu(\Delta_k)$ 对于任意的 $k \in [K]$ 成立。

对于任意的 $i \in [m]$，定义 $B'_i \triangleq \cup_{k\in[K]}(B_i^{(x_k)} \times \Delta'_k)$。容易验证，对于任意的 $i \in [m]$ 和 $j \in [n]$，如果 B_i 同 X_j 独立，则 B'_i 也同 X_j 独立。因此，柱体集 $\mathcal{B}' = \{B'_1, ..., B'_m\}$ 满足：

1. $\mathcal{B}' \sim G_B$；
2. 对于任意的 $i \in [m]$，$|\mu(B_i) - \mu(B'_i)| \le \delta$ 成立。因此，$\mathbf{q}_{\sigma/2} \le \mu(\mathcal{B}') \le \mathbf{q}_{\epsilon-\sigma/2}$；
3. 因为 $\cup_{k\in[K]}((\cup_{i\in[m]}B_i^{(x_k)}) \times \Delta'_k) = \cup_{i\in[m]}(\cup_{k\in[K]}(B_i^{(x_k)} \times \Delta'_k)) = \cup_{i\in[m]}B'_i$，我们有 $\mu(\cup_{i\in[m]}B'_i) = \sum_{k\in[K]} \mu(\cup_{i\in[m]}B_i^{(x_k)})\mu(\Delta'_k) = 1$。

考虑集合 $\mathcal{J}' = \{j \in [n] : \mathcal{B}'\text{在维度 } j \text{ 上是离散的}\}$。$\mathcal{B}'$ 的构造意味着 $\mathcal{J} \cup \{1\} \subseteq \mathcal{J}'$ 成立。因此，我们有 $|\mathcal{J}'| \ge l + 1$。对 $\mathcal{B}'$ 应用归纳假设，我们有**断言成立**。

因此，本引理成立。 □

接下来的引理证明的基本思路如下。由引理3.2，我们有存在着一个离散的柱体集。可以证明，那些依赖于公共变量 X_j 的柱体的测度构成的向量是 d_j 维向量空间中的某些向量的某种凸组合。通过一个简单的组合论证，可以证明最多 d_j 个 d_j 维的向量就足以通过凸组合生成该测度向量，因而就可以得到我们所需要的离散度。

引理 3.3. 对于任意的 $\epsilon > 0$，存在一个 $\mathbf{d}$-离散的柱体集 $\mathcal{A} \sim G_B$ 使得 $\mu(\mathcal{A}) \le \mathbf{q}_\epsilon$ 且有 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) = 1$。

证明. 由引理3.2，我们有存在一个离散的柱体集 $\mathcal{A}' = \{A'_1, ..., A'_m\} \sim G_B$ 使得 $\mu(\mathcal{A}') \le \mathbf{q}_\epsilon$ 且 $\mu(\cup_{i\in[m]} A'_i) = 1$。令 $\mathbf{q}' = \mu(\mathcal{A}')$，假设 $\mathcal{A}'$ 的离散度为 $(d'_1, ..., d'_n)$。接下来，通过对 $l = |\{j \in [n] : d'_j > d_j\}|$ 做归纳，我们将证明存在这样一个 $\mathcal{A}'$ 意味着存在着一个符合引理条件的 $\mathcal{A}$。

归纳基础：如果 $l = 0$，令 $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ 我们有引理成立。

归纳假设：如果 $l \le L$，则引理成立。

归纳：考虑 $l = L + 1$ 的情况。不失一般性，假设 $d'_1 > d_1$。

由离散的定义，我们有存在一种对 $\mathbb{I}^{\{1\}}$ 的划分，将该轴划分成 d'_1 个互斥的可测集 $\Delta_1, ..., \Delta_{d'_1}$，使得 $A'_i = \cup_{k=1}^{d'_1} S_{i,k} \times \Delta_k$ 对于任意的 $i \in [m]$ 成立，其中所有的 $S_{i,k}$ 均是 $\mathbb{I}^{[n]\setminus\{1\}}$ 的子集。令 $T = \{i \in [m] : (i, 1) \in E\}$。我们有 $|T| = d_1$。因为 $\mu(\cup_{i\in[m]} A'_i) = 1$，我们有在忽略零测集时，$\cup_{i\in[m]} S_{i,k} = \mathbb{I}^{[n]\setminus\{1\}}$ 对于任意的 $1 \le k \le d'_1$ 成立。

考虑 d_1 维向量 $\pi = \mathbf{q}'|_T$。注意到 $\mu(A'_i) = \sum_{1\le k\le d'_1} \mu(S_{i,k})\delta_k$ 对于任意的 $i \in T$ 成立，其中 $\delta_k = \mu(\Delta_k)$。令 $\mathbf{v}_k = (\mu(S_{i,k}) : i \in T)$，我们有 $\pi = \sum_{1\le k\le d'_1} \delta_k \mathbf{v}_k$。且 $\mathbf{v}_k$ 与 π 都是 d_1-维欧式空间 $\mathbb{R}^T$ 中的向量。因为 $\delta_i \ge 0$ 对任意的 $i > 0$ 成立且 $\sum_{1\le i\le d'_1} \delta_i = 1$，从几何的视角来看，$\pi$ 被包含在一个由 $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_{d'_1}$ 构成的凸包之中。坐标原点与 π 之间的线段一定同凸包的边界有交点，假设交点为 $\mathbf{u}$。且凸包的边界有一个自然的由维度不超过 $d_1 - 1$ 的三角形构成的三角剖分。因此，$\mathbf{u}$ 被包含在一个由 $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_{d'_1}$ 中的 $K \le d_1$ 个点所张成的单形之中。不失一般性，假设这 K 个点是 $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_K$。我们有存在 $\lambda_1, ..., \lambda_K > 0$ 使得 $\mathbf{u} = \sum_{1\le k\le K} \lambda_k \mathbf{v}_k$ 且 $\sum_{1\le k\le K} \lambda_k = 1$。

对于任意的 $i \in [m]$，令 $A''_i = \cup_{1\le k\le K} S_{i,k} \times \Delta'_k$，其中这些互斥的区间 $\{\Delta'_1, ..., \Delta'_K\}$ 是对 $\mathbb{I}^{\{1\}}$ 的一个划分，且 $\mu(\Delta'_k) = \lambda_k$ 对任意的 $1 \le k \le K$ 成立。对于任意的 $i \in [m] \setminus T$，因为 A'_i 与变量 X_1 独立，我们有 $S_{i,k}$ 与 k 独立，即对于不同的 $k > 0$，$S_{i,k}$ 都是相同的。因此，$A''_i = S_{i,1} \times \mathbb{I}^{\{1\}} = A'_i$。同时，容易验证，对于任意的 $i \in T$ 和 $j \in [n]$，如果 A'_i 同 X_j 独立，则 A''_i 也同 X_j 独立。

令 $\mathcal{A}'' = \{A''_1, ..., A''_m\}$。我们有如下观察：

1. $\mathcal{A}'' \sim G_B$；
2. $\mu(\cup_{i\in[m]} A''_i) = \mu(\cup_{k\in[K]} (\cup_{i\in[m]} S_{i,k}) \times \Delta'_k) = \sum_{k\in[K]} \mu(\cup_{i\in[m]} S_{i,k})\lambda_k = 1$；
3. $\mu(\mathcal{A}'') \le \mu(\mathcal{A}') \le \mathbf{q}_\epsilon$。

令 $(d''_1, ..., d''_n)$ 表示 $\mathcal{A}''$ 的离散度。$\mathcal{A}''$ 的构造意味着 $d''_j \le d'_j$ 对于任意的 $j > 1$ 成立，且 $d''_1 = K \le d_1$。因此，$|\{j \in [n] : d''_i > d_i\}| \le (L + 1) - 1 = L$。对 $\mathcal{A}''$ 应用

归纳假设，我们有本引理成立。 □

由引理3.3，我们有对于任意小的 $\epsilon > 0$，存在一个 **d**-离散的柱体集 $\mathcal{A}_\epsilon$，使得 $\mathbf{q}_\epsilon$ 是其测度的上界。接下来的引理将证明，上述结论对于 $\epsilon = 0$ 的情况也是成立的。证明的基本思路是，当 ϵ 趋近于 0 时，$\mathcal{A}_\epsilon$ 在某种意义上是收敛的，且其极限是一个 **d**-离散的柱体集。为此，我们将建立一个 **d**-离散的柱体集的存在性和一个有多项式个约束的数学规划之间的等价关系。基于这种等价关系以及约束的连续性，可以证明存在一个 $\mathcal{A}_\epsilon$ 的收敛序列，且序列的极限即是所要求的柱体集。

引理 3.4. *存在一个* **d**-*离散的柱体集* $\mathcal{A} \sim G_B$ *使得* $\mu(\mathcal{A}) \leq \mathbf{p}$ *且* $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}} A) = 1$。

证明. 任意选定一个正实数序列 $(\epsilon_l)_{l>0}$ 使得 $\lim\limits_{l\to\infty} \epsilon_l = 0$。

任意选定一个 $l > 0$。令向量 $\mathbf{q}^{(l)} = (q_1^{(l)}, ..., q_m^{(l)}) \triangleq \mathbf{q}_{\epsilon_l}$。由引理 3.3，我们有存在一个 **d**-离散的柱体集 $\mathcal{A}^{(l)} = \{A_1^{(l)}, ..., A_m^{(l)}\} \sim G_B$ 使得 $\mu(\mathcal{A}^{(l)}) \leq \mathbf{q}^{(l)}$ 且 $\mu(\cup_{i\in[m]} A_i^{(l)}) = 1$。令 $\mathbf{r}^{(l)} = (r_1^{(l)}, ..., r_m^{(l)}) \triangleq \mu(\mathcal{A}^{(l)})$。$\mathcal{A}^{(l)}$ 的存在性等价于如下条件 Q。

条件 Q: 对于任意的 $j \in [n], k \in [d_j]$，存在 $x_{jk}^{(l)} \in [0,1]$ 且对于任意的 $i \in [m], j \in [n], k_j \in [d_j]$ 存在 $C_{i,k_1,k_2,...,k_n}^{(l)} \in \{0,1\}$ 使得

1. 对于任意的 $j \in [n], k_j \in [d_j]$，$\sum_{i\in[m]} C_{i,k_1,k_2,...,k_n}^{(l)} \geq 1$;
2. 对于任意的 $i \in [m], j \in [n]$，如果 $(i,j) \notin E$，则 $C_{i,k_1,k_2,...,k_n}^{(l)}$ 与 k_j 独立;
3. 对于任意的 $i \in [m]$，$\sum_{k_1\in[d_1],...,k_n\in[d_n]} (\prod_{j\in[n]} x_{jk_j}^{(l)}) C_{i,k_1,k_2,...,k_n}^{(l)} = r_i^{(l)} \leq q_i^{(l)}$;
4. 对于任意的 $j \in [n]$，$\sum_{k\in d_j} x_{jk}^{(l)} = 1$。

直观地说，**d**-离散意味着每个维度 j 被划分成 d_j 个小段，其中第 k 个小段的长度为 $x_{jk}^{(l)}$。这意味着单位超立方体 $\mathbb{I}^n$ 被划分成一些小的子立方体，其中第 $(k_1, k_2, ..., k_n)$ 个子立方体的测度为 $\prod_{j\in[n]} x_{jk_j}^{(l)}$。变量 $C_{i,k_1,k_2,...,k_n}^{(l)}$ 用来标示第 $(k_1, k_2, ..., k_n)$ 个子立方体是否在柱体 $A_i^{(l)}$ 之中。因此，$\mathcal{A}^{(l)}$ 的存在性与条件 Q 成立的等价关系是显然的。

因为 $i \in [m]$，对于任意的 $j \in [n]$ 有 $k_j \in [d_j]$，且对于任意的 $i \in [m], j \in [n], k_j \in [d_j]$，$C_{i,k_1,k_2,...,k_n}^{(l)} \in \{0,1\}$，我们有 $i, k_1, k_2, ..., k_n$ 与 $C_{i,k_1,k_2,...,k_n}^{(l)}$ 都是在有限集合上取值，且集合的大小与 l 无关。因此，存在一个 l 的子序列使得对于任意给定的 $i, k_1, k_2, ..., k_n$，$C_{i,k_1,k_2,...,k_n}^{(l)}$ 是一个常数。令这个常数为 $C_{i,k_1,k_2,...,k_n}$。不失一般性，我们假设这个子序列即是整个序列。

任意选定 $j \in [n]$ 和 $k \in [d_j]$。则序列 $\{x_{jk}^{(l)}\}_{l\geq 1}$ 一定包含一个收敛子序列，因为区间 $[0,1]$ 是一个紧致的拓扑空间。不失一般性，我们再次假设整个序列 $\{x_{jk}^{(l)}\}_{l\geq 1}$ 收敛。令序列的极限为 x_{jk}。

类似的，不失一般性，我们可以假设对于任意的 $i \in [m]$，序列 $\{r_i^{(l)}\}_{l\geq 1}$ 收敛。令 $r_i = \lim\limits_{l\to\infty} r_i^{(l)}$。显然，对于任意的 $i \in [m]$，我们有 $r_i \leq \lim\limits_{l\to\infty} q_i^{(l)} = p_i$。

当 l 趋近于无穷时，我们有 $\{x_{jk} : j \in [n], k \in [d_j]\}, \{C_{i,k_1,k_2,\ldots,k_n} : i \in [m], k_j \in [d_j], j \in [n]\}$ 满足条件 Q。因此，我们有存在一个 $\mathbf{d}$-离散的柱体集 $\mathcal{A} \sim G_B$ 使得 $\mu(\mathcal{A}) = (r_1, \ldots, r_m) \leq \mathbf{p}$ 且 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}} A) = 1$。 □

注. 引理3.4的证明过程中用到的等价性隐含着一个判定概率向量是否属于 G_B 的变量内部的充分必要条件。即, 向量 $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathcal{VE}(G_B)$ 当且仅当对于任意的 $j \in [n], k \in [d_j]$，存在 $x_{jk} \in [0,1]$ 且对于任意的 $i \in [m], j \in [n], k_j \in [d_j]$ 存在 $C_{i,k_1,k_2,\ldots,k_n} \in \{0,1\}$ 使得

1. 对于任意的 $j \in [n], k_j \in [d_j]$，$\sum_{i\in[m]} C_{i,k_1,k_2,\ldots,k_n} \geq 1$；
2. 对于任意的 $i \in [m], j \in [n]$，如果 $(i,j) \notin E$，则 $C_{i,k_1,k_2,\ldots,k_n}$ 与 k_j 独立；
3. 对于任意的 $i \in [m]$，$\sum_{k_1\in[d_1],\ldots,k_n\in[d_n]} (\prod_{j\in[n]} x_{jk_j}) C_{i,k_1,k_2,\ldots,k_n} \leq q_i$；
4. 对于任意的 $j \in [n]$，$\sum_{k\in[d_j]} x_{jk} = 1$。

接下来的引理将证明引理3.4中得到的柱体集 $\mathcal{A}$ 满足 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$。粗略地说，如果存在 A_i 和 A_j 都依赖于变量 X_l 且满足 $\mu(A_i) < p_i, \mu(A_j) = p_j$，我们可以从 A_j 上切下来一个垂直于坐标轴 X_l 薄片，并通过给 A_i 补上另一个垂直于坐标轴 X_l 的薄片来填补缺失的空间。在这样操作后，我们有 $\mu(A_i) < p_i, \mu(A_j) < p_j$。且该操作没有引入额外的相关性，整个超立方体依然被填满。重复上述操作，我们最终得到的柱体集满足 $\mu(A_k) < p_k$ 对于任意的 $k \in [m]$ 成立，这同 $\mathbf{p}$ 是变量边界向量相矛盾。

引理 3.5. *如果存在柱体集 $\mathcal{A} \sim G_B$ 满足 $\mu(\mathcal{A}) \leq \mathbf{p}$ 且 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}} A) = 1$，则 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$。*

证明. 首先，我们证明如下断言。

断言: 假设存在一个柱体集 $\mathcal{A} \sim G_B$ 使得 $\mu(\mathcal{A}) < \mathbf{p}$ 且 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}} A) = 1$。则存在 $\epsilon > 0$ 和一个柱体集 $\mathcal{B} \sim G_B$ 满足 $\mu(\mathcal{B}) \leq (1-\epsilon)\mathbf{p}$ 且 $\mu(\cup_{B\in\mathcal{B}} B) = 1$。

对断言的证明: 任意选定 $\mathcal{A} \sim G_B$ 使得 $\mathbf{r} \triangleq \mu(\mathcal{A}) < \mathbf{p}$ 且 $\mu(\cup_{i\in[m]} A_i) = 1$。假设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$，$\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$，$\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_m)$。令 $\Delta(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = |\{i \in [m] : r_i < p_i\}|$。我们对 $\Delta(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ 归纳。

归纳基础：$\Delta(\mathbf{r},\mathbf{p}) = m$。选定 $\epsilon > 0$ 使得 $\mathbf{r} \le (1-\epsilon)\mathbf{p}$。令 $\mathcal{B} = \mathcal{A}$，我们有断言成立。

归纳假设：断言对于任意的 $\Delta(\mathbf{r},\mathbf{p}) > K$ 成立。

归纳：考虑 $\Delta(\mathbf{r},\mathbf{p}) = K < m$ 的情形。选定 $i, j \in L(G_B)$ 使得 $r_i < p_i$，$r_j = p_j$，且 $\mathcal{N}(i) \cap \mathcal{N}(j) \ne \emptyset$。因为我们假设 G_B 的基图是连通的，因此满足上述条件的 i, j 一定存在。

令 $\delta = \min\{p_i - r_i, p_j\}$。任意选定 $l_0 \in \mathcal{N}(i) \cap \mathcal{N}(j) \subseteq [n]$。令 D_x 表示柱体 $[x, x+\frac{\delta}{2}] \times \mathbb{I}^{[n]\setminus\{l_0\}} \subset \mathbb{I}^n$，其中 $0 \le x \le 1 - \frac{\delta}{2}$。因为 $\delta \le p_j$，则一定存在 x 使得 $0 < \mu(D_x \cap A_j) < p_j$。任意选定一个这样的 x。令 $A'_j = A_j \setminus D_x$，$A'_i = A_i \cup D_x$。对于任意的 $k \in [m] \setminus \{i, j\}$，令 $A'_k = A_k$。考虑柱体集 $\mathcal{A}' = \{A'_1, ..., A'_m\}$。令 $\mathbf{r}' = (r'_1, ..., r'_m) \triangleq \mu(\mathcal{A}')$。我们有如下观察：

1. $r'_i \le r_i + \frac{\delta}{2} < p_i$ 且 $0 < p_j - \frac{\delta}{2} \le r'_j = p_j - \mu(D_x \cap A_j) < p_j$, 因此 $\mathbf{r}' < \mathbf{p}$；
2. $\mathcal{A}' \sim G_B$，因为 $\mathcal{A} \sim G_B$ 且对于任意的 $(k, l) \notin E$，A'_k 不依赖于 X_l；
3. $\mu(\cup_{i\in[m]} A'_i) = 1$，因为 $\mu(\cup_{i\in[m]} A'_i) \ge \mu(\cup_{i\in[m]} A_i)) = 1$。

注意到 $\Delta(\mathbf{r}',\mathbf{p}) = \Delta(\mathbf{r},\mathbf{p}) + 1 > K$。对 $\mathcal{A}'$ 应用归纳假设，我们有**断言成立**。

现在我们回到引理的证明。假设存在一个柱体集 $\mathcal{A} \sim G_B$ 使得 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}} A) = 1$ 且 $\mu(\mathcal{A}) < \mathbf{p}$。由之前的断言，我们有存在 $\epsilon > 0$ 和一个柱体集 $\mathcal{B} \sim G_B$ 满足 $\mu(\mathcal{B}) \le (1-\epsilon)\mathbf{p}$ 且 $\mu(\cup_{B\in\mathcal{B}} B) = 1$。这与 $\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$ 相矛盾。 □

定理 3.6. 给定一个二部图 $G_B = ([m], [n], E)$ 和 $\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$，令 $\mathbf{d} = (d_1, ..., d_n)$，其中 d_j 是顶点 $j \in R(G_B)$ 的度。则存在一个 $\mathbf{d}$-离散的柱体集 $\mathcal{A} \sim G_B$ 使得 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}} A) = 1$ 且 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$。

证明. 由引理3.4和引理3.5，我们有本定理成立。 □

定理3.6和引理3.5本质上给出了一个**判定二部图的变量边界的充分必要条件**：$\mathbf{p}$ 是一个变量边界向量当且仅当它是使得定理3.6中所描述的柱体集存在的最小向量。因为要满足离散度要求，这类柱体集最多只有有限多种可能的形式，因此，柱体集的存在性至少可以用穷举的方法来检查。从这层意义上说，我们不止能判定变量边界向量，我们还能**构造性地**找到“最差情况下”的柱体集（即这些柱体并起来的测度最大）。方法如定理3.7所述。

定理 3.7. 给定二部图 $G_B = ([m], [n], E)$，令 $\mathbf{d} = (d_1, ..., d_n)$，其中 d_j 是顶点 $j \in R(G_B)$ 的度。对于任意的 $\mathbf{q} \in (0,1)^m$，$\lambda\mathbf{q}$ 是 G_B 的变量边界向量当且仅当 λ 是如

下规划的最优解：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & \lambda \\
s.t.\quad & 1. \text{对于任意的} j \in [n], k_j \in [d_j],\ \sum_{i\in[m]} C_{i,k_1,k_2,...,k_n} \geq 1\text{；} \\
& 2. \text{对于任意的} (i,j) \in ([m]\times[n]) \setminus E,\ C_{i,k_1,k_2,...,k_n} \text{不依赖于} k_j\text{；} \\
& 3. \text{对于任意的} i \in [m],\ \sum_{k_1\in[d_1],...,k_n\in[d_n]} (\prod_{j\in[n]} x_{jk_j}) C_{i,k_1,k_2,...,k_n} = \lambda q_i\text{；} \\
& 4. \text{对于任意的} j \in [n],\ \sum_{k\in[d_j]} x_{jk} = 1\text{；} \\
& 5. \text{对于任意的} j \in [n], k \in [d_j],\ x_{jk} \in [0,1]\text{；} \\
& 6. \text{对于任意的} i \in [m], j \in [n], k_j \in [d_j],\ C_{i,k_1,k_2,...,k_n} \in \{0,1\}\text{。}
\end{aligned}
$$

给定上述规划的一个解，通过把每个坐标轴 X_j 划分成长度分别为 $x_{j1}, \cdots, x_{jd_j}$ 的 d_j 个小区间，$\mathbb{I}^n$ 被划分成了多个子立方体。对于任意的 $i \in [m]$，令 A_i 表示所有标号 $(k_1, k_2, ..., k_n)$ 满足 $C_{i,k_1,k_2,...,k_n} = 1$ 的子立方体的并。则 $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_m\}$ 满足定理3.6的要求。

我们还是以图1.1 (b) 中的二部图为例，来具体说明定理3.7中规划的直观含义。该规划的第 4 条和第 5 条约束合起来限定了，变量 x_j 只有 d_j 种取值。因为图1.1 (b) 满足 $d_1 = d_2 = d_3 = 2$，则每个变量只有两种取值。因此，三维空间中单位立方体被划分成了八个小立方体，如图3.2所示。该规划的第 6 条约束限定了 A_1, A_2, A_3 中的每一个柱体都是其中若干个小立方体的并。该规划的第 2 条约束限定了 A_1, A_2, A_3 是同图1.1 (b) 一致的柱体，如 A_1 不能同 x_3 相关。该规划的第 3 条约束限定了柱体集满足测度要求，即对于任意的 $i \in [3]$，柱体 A_i 的测度恰好为 λq_i。该规划的第 1 条约束限定了这八个小立方体中的每一个一定要被某个柱体覆盖，因而，整个单位立方体被柱体集的并撑满。

由定理3.6，对于任意的 $\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$，存在着“最差情况下”的柱体集是 $\mathbf{d}$-离散的。接下来，我们将把这一结果推广到非变量边界向量的情况。接下来的推论处理的是 $\mathbf{p}$ 在 G_B 的变量内部的情况。其基本思路是向原始的柱体集中添加一个额外的柱体，使得它们的并的测度为 1。通过最小化额外添加的柱体的测度，原始的柱体的并的测度将被最大化。因此，由定理3.6，我们可以得到原始柱体的离散度。

推论 3.8. 给定一个二部图 $G_B = ([m], [n], E)$ 和概率向量 $\mathbf{p} \in \mathcal{VI}(G_B)$，令 $\mathbf{d} =$

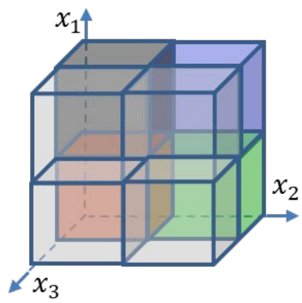


图 3.2 定理3.7中规划的直观含义

$(d_1, \ldots, d_n)$，其中 d_j 是顶点 $j \in R(G_B)$ 的度。令 $\mathbf{d}' = (d_1+1, \ldots, d_n+1)$。则存在着一个 $\mathbf{d}'$-离散的柱体集 $\mathcal{B} = \arg\max_{\mathcal{A}\sim G_B, \mu(\mathcal{A})=\mathbf{p}} \mu(\cup_{A\in\mathcal{A}} A)$。

证明. 令 $\xi = \sup_{\mathcal{A}\sim G_B, \mu(\mathcal{A})=\mathbf{p}} \mu(\cup_{A\in\mathcal{A}} A)$。假设 $\xi < 1$。令 $G'_B = ([m+1], [n], E')$，其中 $E' = E \cup \{(m+1, j) : j \in [n]\}$。令 $\mathbf{p}' \in (0,1]^{m+1}$ 满足如下条件：对于任意的 $1 \le i \le m$，$p'_i = p_i$，且 $p'_{m+1} = 1-\xi$。

任意选定 $\epsilon > 0$ 和 $0 < \delta < \epsilon(1-\xi)$。则我们有如下两个结论：

1. 存在一个柱体集 $\mathcal{A}' \sim G'_B$ 满足 $\mu(\mathcal{A}') \le (1+\epsilon)\mathbf{p}'$ 且 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}'} A) = 1$。这有如下两个方面的原因。一方面，由 ξ 的定义，我们有存在一个柱体集 $\mathcal{A} \sim G_B$ 满足 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$ 且 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}} A) \ge \xi - \delta$。另一方面，令 A_{m+1} 为任意一个满足 $\mu(A_{m+1}) = (1+\epsilon)(1-\xi)$ 且 $\cap_{A\in\mathcal{A}} \overline{A} \subseteq A_{m+1}$ 的柱体。容易验证 $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{A_{m+1}\}$ 即是满足条件的柱体集合。

2. 对于任意满足 $\mu(\mathcal{A}') = (1-\epsilon)\mathbf{p}'$ 的柱体集 $\mathcal{A}' \sim G'_B$，我们有 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}'} A) < 1$。证明如下。任意选定一个测度为 $\mu(\mathcal{A}') = (1-\epsilon)\mathbf{p}'$ 的柱体集 $\mathcal{A}' = \{A_1, \ldots, A_{m+1}\} \sim G'_B$。则我们有 $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \setminus \{A_{m+1}\} \sim G_B$ 且 $\mu(\mathcal{A}) = (1-\epsilon)\mathbf{p}$。由 ξ 的定义有，$\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}} A) \le \xi$。则有 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}'} A) \le \mu(\cup_{A\in\mathcal{A}} A) + \mu(A_{m+1}) = \xi + (1-\epsilon)(1-\xi) < 1$。

因此，我们有 $\mathbf{p}' \in \mathcal{V}\partial(G'_B)$。由定理3.6，我们有存在一个 $\mathbf{d}'$-离散的柱体集 $\mathcal{A}' = \{A_1, \ldots, A_{m+1}\} \sim G'_B$ 满足 $\mu(\mathcal{A}') = \mathbf{p}'$ 且 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}'} A) = 1$。同样的，我们有 $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \setminus \{A_{m+1}\} \sim G_B$ 且 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$。又因为 $1 = \mu(\cup_{A\in\mathcal{A}'} A) \le \mu(\cup_{A\in\mathcal{A}} A) + \mu(A_{m+1}) \le \xi + 1 - \xi = 1$，我们有 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}} A) = 1 - \mu(A_{m+1}) = \xi$。

接下来我们来处理 $\xi = 1$ 的情况。令 $G'_B = ([m+1], [n], E')$。对于任意的 $\epsilon > 0$，令向量 $\mathbf{p}^{(\epsilon)} \triangleq (p_1, \ldots, p_m, \epsilon)$。类似于前述的结论一的证明，我们有存在一个柱体集 $\mathcal{A}^{(\epsilon)} \sim G'_B$ 满足 $\mu(\mathcal{A}^{(\epsilon)}) \le \mathbf{p}^{(\epsilon)}$ 且 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}^{(\epsilon)}} A) = 1$。类似于引理3.4，我们可以证明 $\mathbf{p} = \lim_{\epsilon\to 0} \mathbf{p}^{(\epsilon)}$ 在二部图 G_B 的变量外部，这和假设 $\mathbf{p} \in \mathcal{VI}(G_B)$ 相矛盾。因此，我们有 $\xi \neq 1$。证毕。 □

接下来的推论说明了，对于任意的 $\mathbf{p} \in \mathcal{VE}(G_B)$，也存在着一个离散度很小的柱体集。此推论的证明思路同推论3.8的证明思路相反。某些事件或者某个事件的一部分会被移除，使得剩下的事件恰好填满单位整个超立方体。因此，沿着定理3.6的思路可以将余下的事件离散化。最后，对离散化的方法稍加改进，可使得被移除的事件也被离散化。

推论 3.9. 给定一个二部图 $G_B = ([m],[n],E)$ 和概率向量 $\mathbf{p} \in \mathcal{VE}(G_B)$，令 $\mathbf{d} = (d_1,...,d_n)$，其中 d_j 是顶点 $j \in R(G_B)$ 的度。则存在一个 $\tilde{\mathbf{d}}$-离散的柱体集 $\mathcal{A} \sim G_B$ 满足 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$ 且 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) = 1$，其中，对于某个 $j_0 \in [n]$，$\tilde{d}_{j_0} = d_{j_0} + 1$，对于任意的 $j \neq j_0$，$\tilde{d}_j = d_j$。

证明. 我们对 m 做归纳。

归纳基础: $m = 1$。此时推论显然成立。

归纳假设: 推论对任意的 $m < M$ 成立。

归纳: 考虑 $m = M$ 的情况。令 $G'_B = ([m-1],[n],E')$ 为 G_B 的一个诱导子图，且 $\mathbf{p}' = (p_1,...,p_{m-1})$。接下来我们分两种情况来证明。

情况 1: $\mathbf{p}' \in \mathcal{VE}(G'_B)$。对于任意的 $j \in [n]$，令 $d'_j = |\{i \in [m-1] : (i,j) \in E'\}|$。由归纳假设有，存在一个 $\tilde{\mathbf{d}}'$-离散的柱体集 $\mathcal{A}' \sim G'_B$ 满足 $\mu(\mathcal{A}') = \mathbf{p}'$ 且 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}'}A) = 1$，其中，对于某个 $j_0 \in [n]$，$\tilde{d}'_{j_0} = d'_{j_0} + 1$, 对于任意的 $j \neq j_0$，$\tilde{d}'_j = d'_j$。

不失一般性，假设 $(m,n) \in E$。则 $\mathcal{A}'$ 在维度 n 上的离散度为 $\tilde{d}'_n$ 意味着 $\mathbb{I}^{\{n\}}$ 被划分为 $\tilde{d}'_n$ 个互斥的区间。现在，我们将这个划分改进为 $\tilde{d}'_n + 1$ 个区间使得某些区间的并是 $[0,p_m]$。令 $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cup \{A_m\}$, 其中 $A_m = \mathbb{I}^{n-1} \times [0,p_m]$。则有 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$ 且 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) = 1$。

显然，$\mathcal{A}$ 是 $(\tilde{d}'_1,...,\tilde{d}'_{n-1},\tilde{d}'_n+1)$-离散的。如果 $j_0 = n$，则对于任意的 $j \leq n-1$，$\tilde{d}'_j = d'_j \leq d_j$，且 $\tilde{d}'_n + 1 = (d'_n + 1) + 1 = d_n + 1$。如果 $j_0 \neq n$，则对于任意的 $j \notin \{j_0,n\}$，$\tilde{d}'_j = d'_j \leq d_j$，且 $\tilde{d}'_{j_0} = d'_{j_0} + 1 \leq d_{j_0} + 1$，$\tilde{d}'_n + 1 = d'_n + 1 = d_n$。因此，令 $\tilde{\mathbf{d}} = (d_1,...,d_{j_0-1},d_{j_0}+1,d_{j_0+1},...,d_n)$。我们始终有 $\mathcal{A}$ 是 $\tilde{\mathbf{d}}$-离散的。

情况 2: $\mathbf{p}' \in \mathcal{VI}(G'_B)$。令 $\mathbf{p}'' = (p_1,...,p_{m-1},p''_m) \in (0,1]^m$，其中 $0 < p''_m \leq p_m$ 使得 $\mathbf{p}'' \in \mathcal{V}\partial(G_B)$ 成立。由定理3.6，我们有存在一个 $\mathbf{d}$-离散的柱体集 $\mathcal{A}'' \sim G_B$ 使得 $\mu(\mathcal{A}'') = \mathbf{p}''$ 且 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}''}A) = 1$。与之前类似，不失一般性，假设 $(m,n) \in E$。与情况 1 类似，$\mathcal{A}''$ 的离散度隐含着 $\mathbb{I}^{\{n\}}$ 的划分方式。我们类似地改进划分的方式并构造需要的柱体集 $\mathcal{A}$。证明的细节略去。 □

注. 上述这些定理和推论意味着，给定一个二部图和 $(0,1]^m$ 中的概率向量，存在着最差情况下的柱体集可以被离散化。更重要的是，该柱体集的离散度只由二部图本身决定。

定理3.6，3.7和推论3.8，3.9中提到的离散度是紧的。考虑完全二部图 $G_B = ([m],[1],\{(1,1)\})$。对于任意的 $\mathbf{p} \in (0,1]^m$，$\mathbf{p} \in \mathcal{VI}(G_B)$ 当且仅当 $\sum_{i\in[m]} p_i < 1$，且 $\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$ 当且仅当 $\sum_{i\in[m]} p_i = 1$。不难验证，对于这个例子，上述定理和推论中提到的离散度都是紧的。

3.3 圈二部图的变量边界

在本节中，我们计算圈二部图的变量边界。粗略地说，一个由变量生成的事件系统，如果满足当把这些事件看作是圈的顶点时邻居（且只有邻居）共用公共的随机变量，则这个事件系统可以由圈二部图来建模。目前所知的唯一一个变量版本与抽象版本有差异的例子即是长为 4 的圈二部图。

定义 3.3 (圈二部图)**.** 如果一个二部图 G_B 的基图 $G_D(G_B)$ 是一个长为 n 的圈，我们称该二部图为长为 n 的圈二部图。当 $n = 3$ 时，我们还额外要求 $\cap_{i\in L(G_B)}\mathcal{N}(i) = \emptyset$。在不引起歧义的情况下，长为 n 的圈二部图也简称为圈二部图。

定义 $k(\overline{\mathrm{mod}}\, n)$ 为 $(k-1)(\mathrm{mod}\, n)+1$。容易证明，任何一个长为 n 的圈二部图的变量边界同二部图 $G_n = ([n],[n],E_n)$ 的变量边界相同，其中 $E_n = \{(i,i),(i,(i+1)(\overline{\mathrm{mod}}\, n)) : i \in [n]\}$。我们称 G_n 为*标准的*长为 n 的圈二部图。因此，我们在本小节中只考虑 G_n。容易验证，标准的长为 n 的圈二部图其实是一个长为 $2n$ 的圈。

为了简化符号，在不引起歧义的前提下，我们将省略符号 “$(\overline{\mathrm{mod}}\, n)$”。

以下是一个同圈二部图相关的概念。

定义 3.4 (线二部图)**.** 我们称一个二部图 G_B 为长为 n 的线二部图当且仅当其基图 $G_D(G_B)$ 是一条长为 n 的路径。在不引起歧义的情况下，长为 n 的线二部图也简称为线二部图。

一个惊人的结论是，在某种意义下圈二部图与线二部图等价：任何一个长为 n 的圈二部图的变量边界向量也是长为 n 的线二部图的变量边界向量。因此，为了找到圈二部图特定方向的变量边界向量，其某两个相邻的事件可以通过忽略公共变量来解耦，即这两个事件变得独立。在此意义下，我们说圈被断开了。即，我们有如下定理。

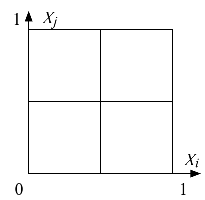


图 3.3 对 $\mathbb{I}^{\{i,j\}}$ 的划分

定理 3.10. 对于任意的向量 $\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_n)$，存在一个 $\mathbf{d}$-离散的柱体集 $\mathcal{A} \sim G_n$ 满足 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$，$\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) = 1$，且 $\mathbf{d} < (2,2,...,2)$。

注. $\mathbf{d} < (2,2,...,2)$ 意味着存在 $j \in [n]$ 满足 $d_j = 1$。则所有的柱体，包括 A_j 和 A_{j+1}，都同 X_j 独立。令 $G_n^{\{j\}}$ 为通过移除顶点 $j \in R(G_n)$ 得到的长为 n 的线二部图。则我们有柱体集 $\mathcal{A}$ 也同 $G_n^{\{j\}}$ 一致，这意味着 $\mathbf{p} \in \mathcal{VE}(G_n^{\{j\}})$。因为有假设 $\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_n)$，且不难验证 $\mathcal{VE}(G_n^{\{j\}}) \subseteq \mathcal{VE}(G_n)$，则 $\mathbf{p}$ 一定是 $G_n^{\{j\}}$ 的变量边界向量。

为了证明定理3.10，首先任意选定 $\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_n)$。由定理 3.6，我们有存在一个 $(2,2,...,2)$-离散的柱体集 $\mathcal{A} \sim G_n$ 使得 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$ 且 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) = 1$。任意选定一个这样的柱体集 $\mathcal{A} = \{A_1,...,A_n\}$。对于任意的 $i \in [n]$，令 B_i 为事件 A_i 的基，即 B_i 满足 $B_i \subseteq \mathbb{I}^{\{i,i+1\}}$ 且 $A_i = B_i \times \mathbb{I}^{[n]\setminus\{i,i+1\}}$。对于任意的 $1 \le i,j \le n$，如果 $i \le j$，令 $\mathcal{B}_{ij} = \{B_i,...,B_j\}$，否则令 $\mathcal{B}_{ij} = \{B_i,...,B_n,B_1,...,B_j\}$。

对于任意的 $S_1 \subseteq \mathbb{I}^{\{i,j\}}, S_2 \subseteq \mathbb{I}^{\{j,k\}}$ 满足 $i \ne j \ne k$，令 $F(S_1,S_2)$ 为最大的满足 $S \times \mathbb{I}^{[n]\setminus\{i,k\}} \subseteq S_1 \times \mathbb{I}^{[n]\setminus\{i,j\}} \cup S_2 \times \mathbb{I}^{[n]\setminus\{j,k\}}$ 的集合 $S \subseteq \mathbb{I}^{\{i,k\}}$。对于任意的 $2 < l \le n$，令 $F(S_1,S_2,...,S_l) = F(S_1,F(S_2,S_3,...,S_l))$。

对于任意的 $i \ne j \in [n]$，我们有 $F(\mathcal{B}_{i,j}) = F(B_i,F(\mathcal{B}_{i+1,j})) = F(F(\mathcal{B}_{i,j-1}),\mathcal{B}_j)$。为了简单起见，令 $F(\mathcal{B}_{i,i}) = B_i$。不难验证，$F(\mathcal{B}_{i,j})$ 拥有如下性质：对于任意的 $i \le j$，$\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) = 1$ 当且仅当 $\mu(F(\mathcal{B}_{i,j}) \cup F(\mathcal{B}_{j+1,i-1})) = 1$。

由 $\mathcal{A}$ 的离散度，我们有所有的 $\mathbb{I}^{\{i,j\}}$ 都被划分为四个长方形，如图3.3所示。且只有其中某些矩形的并是有意义的。图3.4列举出了 4 类 14 种非平凡的矩形的并，4 类分别为 $T_1,...,T_4$，14 种分别为 T_{11} 到 T_{44}。对于任意的 $i,j \in [n]$，B_i 和 $F(\mathcal{B}_{i,j})$ 一定分别是对 $\mathbb{I}^{\{i,i+1\}}$ 和 $\mathbb{I}^{\{i,j+1\}}$ 的 14 种划分之一。

引理 3.11. 对于任意的 $i,j \in [n]$，$F(\mathcal{B}_{j+1,i-1}) = \mathbb{I}^{\{i,j\}} \setminus F(\mathcal{B}_{i,j})$。

证明. 因为 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) = 1$，我们有 $\mu(F(\mathcal{B}_{j+1,i-1}) \cup F(\mathcal{B}_{i,j})) = 1$，这等价于 $F(\mathcal{B}_{j+1,i-1}) \supseteq \mathbb{I}^{\{i,j\}} \setminus F(\mathcal{B}_{i,j})$。由 F 的定义，我们有任意的 $F(\mathcal{B}_{i,j})$ 和 $F(\mathcal{B}_{j+1,i-1})$ 一定是图 3.4所

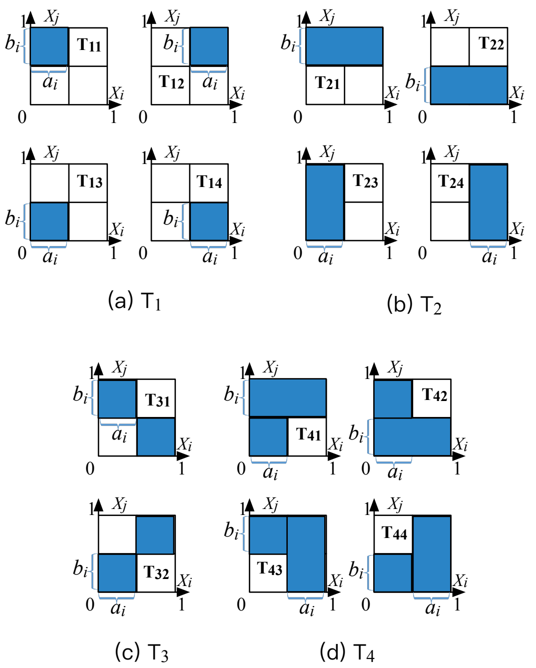


图 3.4 对 $\mathbb{I}^{\{i,j\}}$ 的 14 种划分，其中阴影部分为柱体的投影

示的 14 种可能之一。

假设 $F(\mathcal{B}_{i,j}) \cap F(\mathcal{B}_{j+1,i-1})) \neq \emptyset$。则 $F(\mathcal{B}_{i,j})$ 中一定有一个小矩形可以被移除，同时还保持性质 $\mu(F(\mathcal{B}_{j+1,i-1}) \cup F(\mathcal{B}_{i,j})) = 1$ 成立。这可以通过从 B_i 或 $F(\mathcal{B}_{i+1,j})$ 中移除一个小矩形来实现。按此迭代下去，我们有即使某个 $\mathcal{B}_{i,j}$ 减小，$\mu(F(\mathcal{B}_{j+1,i-1}) \cup F(\mathcal{B}_{i,j})) = 1$ 仍然成立。由引理3.5 及假设 $\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_n)$，即可导出矛盾。 □

接下来，我们分析 B_i, B_{i+1} 的类型需要满足什么关系。

如果某个事件 B_i 属于类 T_2，则 A_i 同 X_i 和 X_{i+1} 二者之一独立。容易验证，$\mathcal{A}$ 在维度 i 和 $i+1$ 中有一个是 1-离散的。因此，我们有如下引理。

引理 3.12. *对于某个 $i \in [n]$，如果 B_i 属于类 T_2，则 $\mathcal{A}$ 的离散度小于 $(2, 2, ..., 2)$。*

证明. 任意选定 $i \in [n]$ 满足 B_i 属于类 T_2。不失一般性，假设 B_i 与变量 X_i 独立。这意味着除了 B_{i-1} 的所有事件都同 X_i 独立。由引理3.11有 $B_{i-1} = \mathbb{I}^{\{i-1,i\}} \setminus F(\mathcal{B}_{i,i-2})$ 也同 X_i 独立。因此，柱体集 $\mathcal{A}$ 不依赖于 X_i，也就是说，它在维度 i 上是 1-离散的。 □

引理 3.13. *对于任意的 $i, j \in [n]$ 满足 $i < j$ 或 $i > j+1$，我们有如下结论：*

1. 如果 $F(\mathcal{B}_{i,j})$ 属于类 T_1，则 B_i 与 $F(\mathcal{B}_{i+1,j})$ 均属于类 T_1。

2. 如果 $F(\mathcal{B}_{i,j})$ 属于类 T_3，则 B_i 与 $F(\mathcal{B}_{i+1,j})$ 均属于类 T_3。

3. 假设 $\mathcal{B}_{i,j}$ 中的基均不属于类 T_2。如果 $F(\mathcal{B}_{i,j})$ 属于类 T_4，则 B_i 与 $F(\mathcal{B}_{i+1,j})$ 中的一个属于类 T_1，另一个属于类 T_4。

证明. 对于上述三种情况，都容易验证如下两个事实。第一，引理中所述的 B_i 和 $F(\mathcal{B}_{i+1,j})$ 的类型组合是可行的，即可以生成所要求的 $F(\mathcal{B}_{i,j})$ 的类型。第二，引理中所述的类型组合是最小的，即如果 B_i 与 $F(\mathcal{B}_{i+1,j})$ 是其他可行的类型，则在不改变 $F(\mathcal{B}_{i,j})$ 的前提下，其中至少有一个可以减小。因此，同引理3.11的证明类似，在不改变 $F(\mathcal{B}_{i,j})$ 的前提下，$\mathcal{B}_{i,j}$ 中至少有一个事件可以减小。这里，我们省略这两个事实的证明细节。

由上述第二个事实和引理3.5，因为 $\mathbf{p}$ 是一个变量边界向量，我们有不存在其他可能的类型组合。 □

接下来的引理表明，如果 $B_1,...,B_n$ 均不属于类 T_2，则 $B_1,...,B_n$ 最多只有两种不同的类型组合。

引理 3.14. 如果 $B_1,...,B_n$ 均不属于类 T_2，则 $B_1,...,B_n$ 最多只有两种可能的类型组合。

1. T_1*-dominant:* 除了某个基属于类 T_4 以外，其他的基都属于类 T_1。

2. T_3*-dominant:* 所有的基都属于类 T_3。

证明. 分类讨论如下。

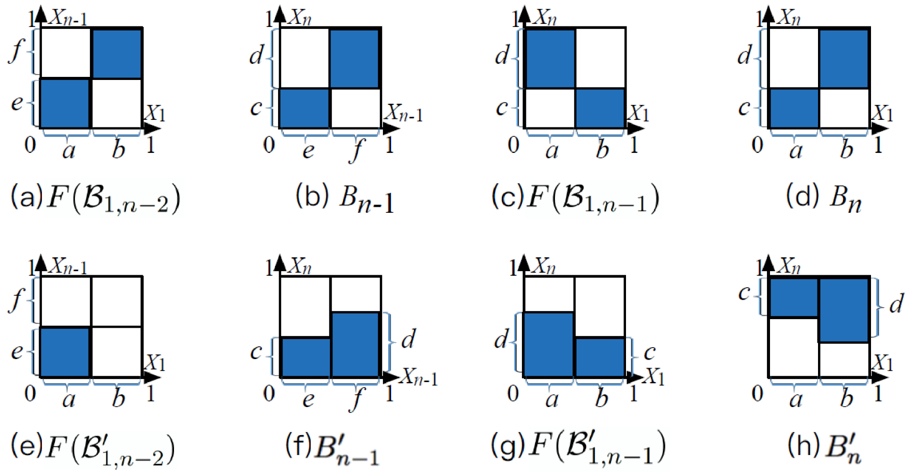
情况 1: B_1 属于类 T_1。由引理3.11，$F(\mathcal{B}_{2,n})$ 属于类 T_4。对 $F(\mathcal{B}_{2,n})$ 应用引理3.13，我们有如下两种可能性：一是 B_2 属于类 T_4 且 $F(\mathcal{B}_{3,n})$ 属于类 T_1，另一种是 B_2 属于类 T_1 且 $F(\mathcal{B}_{3,n})$ 属于类 T_4。之后，对 $F(\mathcal{B}_{3,n})$ 迭代地使用引理3.13。综合上述两种可能性，我们有所有的基中只有一个属于类 T_4，其余都属于类 T_1。

情况 2: B_1 属于类 T_3。由引理3.11，$F(\mathcal{B}_{2,n})$ 属于类 T_3。对 $F(\mathcal{B}_{2,n})$ 应用引理3.13，我们有 B_2 和 $F(\mathcal{B}_{3,n})$ 都属于类 T_3。重复上述过程，我们有所有的基都属于类 T_3。

情况 3: B_1 属于类 T_4。由引理3.11，$F(\mathcal{B}_{2,n})$ 属于类 T_1。对 $F(\mathcal{B}_{2,n})$ 迭代地使用引理3.13，我们有其他所有的 B_i 都属于类 T_1。 □

然而，下面两个引理将分别排除掉以上两种可能性。

引理 3.15. 类型组合 T_3*-dominant* 不可能出现。



(a) $F(\mathcal{B}_{1,n-2})$ (b) $B_{n\text{-}1}$ (c) $F(\mathcal{B}_{1,n-1})$ (d) B_n

(e) $F(\mathcal{B}'_{1,n-2})$ (f) B'_{n-1} (g) $F(\mathcal{B}'_{1,n-1})$ (h) B'_n

图 3.5 所有的基都属于类 T_3 是不可能的

证明. 采用反证法。假设所有的 B_i 都属于类 T_3。则 $F(\mathcal{B}_{1,n-2})$ 也属于类 T_3。不失一般性，假设 $F(\mathcal{B}_{1,n-2})$ 和 B_{n-1} 分别如图3.5(a) 和3.5(b) 所示。则 $\mu(A_{n-1}) = ce + df$。假设 $c \leq d$。

一方面，$F(\mathcal{B}_{1,n-1})$ 如图3.5(c) 所示。由引理3.11，B_n 一定如图3.5(d) 所示。我们有 $\mu(A_n) = ac + bd$。

另一方面，对于任意的 $1 \leq i \leq n-2$，我们可以通过恰当地移除 B_i 的两个小矩形中的某一个，来构造 B'_i，使得 $F(\mathcal{B}'_{1,n-2})$ 如图3.5(e) 所示。令 B'_{n-1} 如图3.5(f) 所示。容易验证，$F(\mathcal{B}'_{1,n-1})$ 一定如图3.5(g) 所示。令 B'_n 如图 3.5(h) 所示。令 $\mathcal{A}'$ 表示基分别为 $B'_1, \ldots, B'_n$ 的柱体构成的集合。则我们有如下结论：对于任意的 $1 \leq i \leq n-2$，$\mu(A'_i) < \mu(A_i)$；对于任意的 $i \in \{n, n-1\}$，$\mu(A'_i) = \mu(A_i)$；且 $\mathbb{P}(\cup_{i\in[n]} A'_i) = 1$，$\mathcal{A}' \sim G_n$。因为 $\mathbf{p}$ 是一个变量边界向量，由引理3.5，即可导出矛盾。

□

引理 3.16. 类型组合 T_1-*dominant* 不可能出现。

证明. 采用反证法。不失一般性，假设 B_n 属于类 T_4，其他的 B_i 属于类 T_1。我们进一步假设，对于任意的 $1 \leq i \leq n-1$，B_i 属于类型 T_{14}，如图3.4(a) 所示。令 $(p_1, \ldots, p_n) = \mathbf{p}$。我们有对于任意的 $1 \leq i \leq n-1$，$a_i b_i = p_i$，且对于任意的 $1 \leq j \leq n-2$，$b_j + a_{j+1} = 1$。这些参数 a_i 和 b_i 的设置应该使得 $F(\mathcal{B}_{1,n-1})$ 的测度，即 $a_1 b_{n-1}$，最大化。

令 $x = b_{n-2} \in (0,1)$。则 $b_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{1-x}$，$a_{n-2} = f_0(x) \triangleq \frac{p_{n-2}}{x}$，且对于任意的 $1 \le k \le n-3$，$a_{n-2-k} = f_k(x) \triangleq \frac{p_{n-2-k}}{1-f_{k-1}(x)}$。令 $g(x) \triangleq a_1 b_{n-1} = f_{n-3}(x)\frac{p_{n-1}}{1-x}$。

为了最大化 $g(x)$，我们考虑它的倒数 $\frac{dg(x)}{dx} = f_{n-3}(x)\frac{p_{n-1}}{(1-x)^2} + \frac{df_{n-3}(x)}{dx}\frac{p_{n-1}}{1-x}$。因为我们只关心 $\frac{dg(x)}{dx}$ 的符号，令 $h(x) \triangleq \frac{dg(x)}{dx}\frac{(1-x)^2}{p_{n-1}} = f_{n-3}(x) + \frac{df_{n-3}(x)}{dx}(1-x)$。容易验证 $\frac{dh(x)}{dx} = \frac{d^2 f_{n-3}(x)}{d^2x}(1-x)$。

同时, 对于任意的 $0 \le k \le n-4$, $\frac{d^2 f_{k+1}(x)}{d^2x} = \frac{p_{n-3-k}}{(1-f_k(x))^2}\frac{d^2 f_k(x)}{d^2x} + 2\frac{p_{n-3-k}}{(1-f_k(x))^3}\left(\frac{df_k(x)}{dx}\right)^2$。因为 $\frac{d^2 f_0(x)}{d^2x} > 0$，由归纳法容易验证 $\frac{d^2 f_k(x)}{d^2x} > 0$ 对于任意的 $1 \le k \le n-3$ 成立。

综上所述，我们有当 $x \in (0,1)$ 时，$\frac{dh(x)}{dx} > 0$。这意味着有如下三种可能性:

1. 对于任意的 $x \in (0,1)$，$h(x) > 0$;
2. 对于任意的 $x \in (0,1)$，$h(x) < 0$;
3. 存在 $x_0 \in (0,1)$ 使得当 $x \in (0,x_0)$ 时, $h(x) < 0$, 当 $x \in (x_0,1)$ 时, $h(x) > 0$, 且 $h(x_0) = 0$。

因为 $h(x)$ 和 $\frac{dg(x)}{dx}$ 的符号相同，则 $g(x)$ 要么在 $(0,1)$ 上是单调的，要么在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,1)$ 上单调递增。

另一方面，我们将证明 $x = b_{n-2}$ 的取值构成 $(0,1)$ 上的一个闭区间。首先，因为 $1 \ge b_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{1-x}$，$x$ 随着 b_{n-1} 的增大而增大，因此，x 在 B_{n-1} 属于类 T_2 时达到上界。其次，容易验证 x 随着 a_1 的增大而减小，因此，x 在 B_1 属于类 T_2 时达到下界。

因为 $g(x)$ 在 x 达到上界或下界时取得极大值, 则当 $g(x)$ 取得极大值时, B_{n-1} 和 B_1 中有一个属于类 T_2, 这和我们的假设, $F(\mathcal{B}_{1,n-1})$ 的测度在 B_n 属于类 T_4, 其他的 B_i 均属于类 T_1 时取得最大值相矛盾。 □

现在，我们来证明定理3.10。

证明. 由引理3.12, 3.14, 3.15, 3.16，我们有定理3.10成立。 □

定理 3.17. *给定一个向量* $\mathbf{p} \in (0,1)^n$，*对于任意的* $i \in [n]$，*令* λ_i *为如下方程组的最小正数解:* $b_1 = \lambda p_i$，*对任意的* $2 \le k \le n-1$，$b_k = \frac{\lambda p_{k+i-1}}{1-b_{k-1}}$，$b_{n-1} = 1 - \lambda p_{i-1}$。*令* $\lambda_0 = \min_{i\in[n]} \lambda_i$。*则* $\lambda_0 \mathbf{p}$ *是长为* n *的圈二部图的变量边界向量。*

证明. 任意选定一个向量 $\mathbf{p} \in (0,1]^n$。由引理3.1，存在一个唯一的 $\lambda > 0$ 使得 $\lambda\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_n)$。由定理3.10，存在一个 $\mathbf{d}$-离散的柱体集 $\mathcal{A} \sim G_n$ 使得 $\mu(\mathcal{A}) = \lambda\mathbf{p}$，$\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}} A) = 1$，且 $\mathbf{d} < (2,2,...,2)$。则每一个 $A_i \in \mathcal{A}$ 都有一个基 $B_i \in \mathbb{I}^{\{i,i+1\}}$。任意选定一个 $i \in [n]$ 使得 $d_i = 1$，则有 B_i 和 B_{i-1} 均属于类 T_2，且 $F(\mathcal{B}_{i-1,i})$ 属于类

T_4。更精确地说，B_{i-1} 属于类型 T_{23} 或 T_{24}，且 B_i 属于类型 T_{21} 或 T_{22}。由引理3.11，$F(\mathcal{B}_{i+1,i-2})$ 属于类 T_1。由引理3.13，可以证明，对于任意的 $j \notin \{i-1, i\}$，B_j 属于类 T_1。这些类型均如图3.4所示。使用图3.4中的标记，容易验证 $a_{i-1} = \lambda p_{i-1}$，$b_i = \lambda p_i$，对于任意的 $j \neq i-1$，有 $b_j + a_{j+1} = 1$，且对于任意的 $k \notin \{i-1, i\}$，有 $b_k a_k = \lambda p_k$。消掉所有的 a，并恰当地调整 b 的下标，即可得到本定理中的方程组。因此，这个唯一的 λ，即 λ_0，即是方程组的解。

对于任意的 $0 < \lambda' < \lambda_0$，令 $b'_1 = \lambda' p_i$，对于任意的 $2 \leq k \leq n-1$，令 $b'_k = \frac{\lambda' p_{k+i-1}}{1-b'_{k-1}}$。利用归纳法可以证明，对于任意的 $1 \leq k \leq n-1$，$0 < b'_k < b_k$ 成立。另一方面，如果 $b'_{n-1} = 1 - \lambda' p_{i-1}$ 成立，则 $b'_{n-1} > b_{n-1}$，由此导出矛盾。因此，λ' 不可能是定理中方程组的一个解。综上所述，λ_0 是方程组的最小正数解。证毕。 □

作为定理3.17的一个应用，我们将显式地给出长为 3 的圈二部图的变量边界向量。

例 3.1. 对于 G_3，考虑任意满足 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ 的概率向量 $\mathbf{p} \in (0,1)^3$。对于任意的 $i \in \{1,2,3\}$，我们有 $\lambda_i = \frac{1-\sqrt{1-4p_i p_{i-1}}}{2p_i p_{i-1}}$。因为函数 $\frac{1-\sqrt{1-2x}}{x}$ 在 $x > 0$ 时随 x 单调递增，则最终的 λ_0 为 λ_j，其中 $p_i p_{i-1}$ 在 $i = j$ 时取得极大值。例如，如果 $p_1 \geq p_2$ 且 $p_1 \geq p_3$，则 $\lambda_3 \mathbf{p} = \frac{1-\sqrt{1-4p_2p_3}}{2p_2p_3}\mathbf{p}$ 是一个变量边界向量。

具体的，G_3 的变量边界如图3.6所示。可以看到，G_3 的变量边界是一个凸多边形，同图1.2所示的其基图的抽象边界是三角形不同。

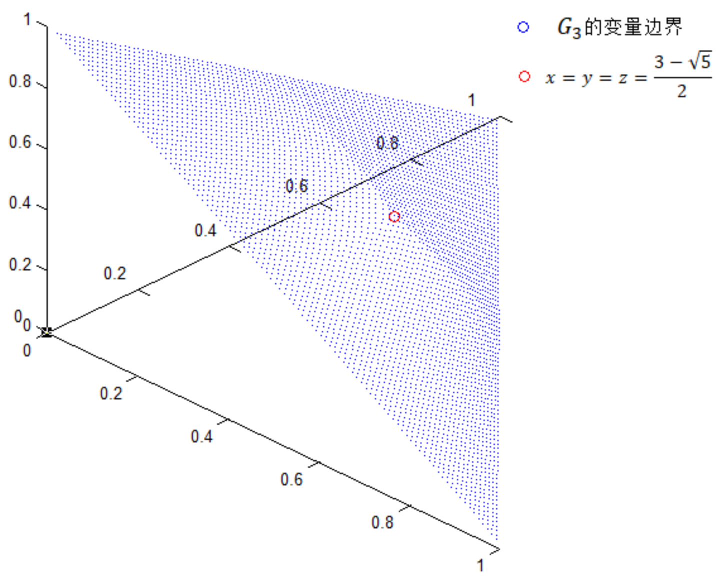


图 3.6 G_3 的变量边界

3.4 变量版本与抽象版本之间的差异

在本小节中，我们分析在什么条件下 Shearer 界对于变量版本局部引理依然是紧的。

3.4.1 差异存在的判定定理

定义 3.5 (互斥)**.** 给定一个事件集 $\mathcal{A}$ 和图 G_D，如果 G_D 是 $\mathcal{A}$ 的一个依赖图，且对于任意 i, j 满足 $i \in \Gamma_j$，$\mu(A_i \cap A_j) = 0$，我们称事件集 $\mathcal{A}$ 相对于依赖图 G_D 是互斥的。如果柱体集 $\mathcal{A}$ 同二部图 G_B 一致，且 $\mathcal{A}$ 相对于 $G_D(G_B)$ 是互斥的，我们称 $\mathcal{A}$ 相对于 G_B 是互斥的。在不引起歧义的前提下，我们将省略“相对于 G_D”和“相对于 G_B”。

如下引理说明了，只要概率足够小，则总存在着一个互斥的柱体集。

引理 3.18. *对于任意的二部图 G_B，存在一个 $\epsilon > 0$ 使得对于任意的向量 $\mathbf{p} \in (0, \epsilon)^m$，存在一个相对于 G_B 互斥的柱体集 $\mathcal{A}$ 满足 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$。*

证明. 令 $G_B = ([m], [n], E)$。对于任意的 $i \in L(G_B)$，令 $A_i = \{(x_1, ..., x_n)$: 对于任意的 $j \in \mathcal{N}(i), \frac{i-1}{m} \le x_j < \frac{i}{m}\}$。显然，$\{A_1, ..., A_m\}$ 相对于 G_B 互斥。令 $\epsilon = \min_{i \in L(G_B)} \mu(A_i)$，有此引理成立。 □

定义 3.6 (抽象内部)**.** 一个依赖图 $G_D = ([m], E)$ 的抽象内部，用 $\mathcal{I}(G_D)$ 表示，定义为集合 $\{\mathbf{p} \in (0,1)^m : \mathbb{P}\left(\cap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}\right) > 0$ 对于任意满足 $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$ 的事件集 $\mathcal{A} \sim_a G_D$

成立 }，其中，“$\mathcal{A} \sim_a G_D$” 表示 G_D 是 $\mathcal{A}$ 的依赖图。给定一个二部图 G_B，我们将 $\mathcal{I}(G_D(G_B))$ 简写为 $\mathcal{I}(G_B)$。

显然，对于任意的二部图 G_B，我们有 $\mathcal{I}(G_B) \subseteq \mathcal{VI}(G_B)$。

定义 3.7 (抽象边界)**.** 一个依赖图 $G_D = ([m], E)$ 的*抽象边界*，用 $\partial(G_D)$ 表示，定义为集合 $\{\mathbf{p} \in (0,1]^m : (1-\epsilon)\mathbf{p} \in \mathcal{I}(G_D)$且$(1+\epsilon)\mathbf{p} \notin \mathcal{I}(G_D)$ 对于任意的 $\epsilon \in (0,1)$ 成立 $\}$。我们称 $\mathbf{p} \in \partial(G_D)$ 为 G_D 的*抽象边界向量*。给定一个二部图 G_B，我们将 $\partial(G_D(G_B))$ 简写为 $\partial(G_B)$。

以下是互斥事件集的一个有趣的性质。

引理 3.19. *给定依赖图 G_D 和概率向量 $\mathbf{p} \in \mathcal{I}(G_D) \cup \partial(G_D)$，在所有满足 $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$ 的事件集 $\mathcal{A} \sim_a G_D$ 中，存在一个互斥的事件集使得 $\mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}} A)$ 取得最大值。*

证明. 由 (Shearer, 1985, 定理 1) 的证明，此引理是显然的。 □

定义 3.8 (变量版本与抽象版本有差异)**.** 我们称一个二部图 G_B *在方向* $\mathbf{p} \in (0,1)^m$ *上变量版本与抽象版本有差异*，当且仅当存在一个 $\lambda > 0$ 使得 $\lambda\mathbf{p} \in \mathcal{VI}(G_B) \setminus \mathcal{I}(G_B)$，否则我们称它在这个方向上变量版本与抽象版本没有差异。我们称 G_B *变量版本与抽象版本有差异*，当且仅当它在某个方向上变量版本与抽象版本有差异，否则我们称它没有差异。

在本章中，我们提到有差异即是指变量版本与抽象版本有差异。

本小节的主要结论，即定理3.25，是判定一个二部图是否有差异的充分必要条件。直觉上，在二部图的变量内部和变量边界上，它将没有差异和事件集互斥联系了起来。乍一看，没有差异和事件集互斥之间的联系是由 Shearer 证明的引理3.19的一个显然的推论。然而，事实并非如此。证明定理3.25的最主要的难度在于变量边界向量。假设一个二部图是没有差异的。一方面，对于任何一个变量边界向量，由引理3.19有，存在一个互斥的事件集满足所有事件的并概率为 1。但这些事件未必是柱体，因此我们不能断言存在一个互斥的柱体集。另一方面，的确可以证明存在一个柱体集，其中所有柱体的并的测度为 1。同时，如果非互斥事件的并的概率始终小于互斥事件的并，则这样的柱体集还一定是互斥的。但引理3.19只断言了非互斥事件的并的概率不更大，却没有排除互斥事件的并和非互斥事件的并概率相等的情况。我们的证明本质上是在排除掉这种情况，如引理3.22所述。

以下引理将被用来证明引理3.22。它表明互斥事件集中每一个单独的事件都对整体的概率有贡献。

引理 3.20. 给定一个互斥的事件集 $\mathcal{A}$，对于任意的 $\mathcal{A}' \subsetneq \mathcal{A}$，有 $\mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}'}A) < \mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}}A)$ 成立。

证明. 我们对 $|\mathcal{A}|$，即 $\mathcal{A}$ 的大小做归纳。

归纳基础： $|\mathcal{A}| = 1$。此时引理显然成立。

归纳假设： 引理在 $|\mathcal{A}| < m$ 时成立。

归纳： 考虑 $|\mathcal{A}| = m$ 的情况。令 $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_m\}$，且 $G_D = ([m], E)$ 是一个使得 $\mathcal{A}$ 相对于 G_D 互斥的依赖图。我们采用反证法。假设存在 $B \in \mathcal{A}$ 使得 $\mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}\setminus\{B\}}A) = \mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}}A)$，我们来导出矛盾。不失一般性，假设 $B = A_m$。

因为 $\mathbb{P}(\cup_{i\in[m-1]}A_i) = \mathbb{P}(\cup_{i\in[m]}A_i)$，我们有 $A_m \subseteq \cup_{i\in[m-1]}A_i$。又因为 $\mathcal{A}$ 是互斥的，则 $A_m \cap (\cup_{i\in\Gamma_m}A_i) = \emptyset$。因此，$A_m \subseteq \cup_{i\notin\Gamma_m^+}A_i$，其中 $\Gamma_m^+ \triangleq \Gamma_m \cup \{m\}$。因为 A_m 和 $\{A_i : i \notin \Gamma_m^+\}$ 是独立的，我们有 $\mathbb{P}(A_m) = \mathbb{P}(A_m \cap \cup_{i\notin\Gamma_m^+}A_i) = \mathbb{P}(A_m)\mathbb{P}(\cup_{i\notin\Gamma_m^+}A_i)$，这意味着 $\mathbb{P}(\cup_{i\notin\Gamma_m^+}A_i) = 1$。

考虑图 G_D 在移除 Γ_m^+ 后的连通分支。一定有一个连通分支 Λ 满足 $\mathbb{P}(\cup_{i\in\Lambda}A_i) = 1$，因为如下两个事实。第一，不同连通分支里的事件集是相互独立的。第二，如果两个独立事件集中所有事件的并概率为 1，则其中至少有一个事件集的并概率为 1。

因为顶点 m 同 Λ 是分离的，而图 G 又是连通的，则一定存在某个顶点 $k \in \Gamma_m$ 同 Λ 相邻。令 $\Lambda' = \Lambda \cup \{k\}$，令 G_D' 为 G_D 在 Λ' 上的诱导子图，$\mathbf{p}' = \mathbf{p}|_{\Lambda'}$，$\mathcal{A}' = \{A_i : i \in \Lambda'\}$。则 $\mathcal{A}'$ 相对于图 G_D' 是互斥的，且 $\mathbb{P}(\mathcal{A}') = \mathbf{p}'$。因为 G' 的顶点数比 m 少，由归纳假设，有 $\mathbb{P}(\cup_{i\in\Lambda'}A_i) > \mathbb{P}(\cup_{i\in\Lambda}A_i) = 1$，即可导出矛盾。 □

如下的推论说明了任何一个互斥的柱体集对应的概率向量要么在二部图的变量内部，要么在二部图的变量边界上。它可以被看作是引理3.19的另一面。

推论 3.21. 给定一个二部图 G_B 和一个概率向量 $\mathbf{p} \in (0,1]^m$，如果存在一个相对于 G_B 互斥的柱体集 $\mathcal{A}$ 满足 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$，则 $\mathbf{p} \in \mathcal{VI}(G_B) \cup \mathcal{V}\partial(G_B)$。

证明. 假设 $G_B = ([m], [n], E)$，$\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_m\}$，$\mathbf{p} = (p_1, ..., p_m)$。考虑顶点 $m \in L(G_B)$，令 B_m 为柱体 A_m 在 $\mathbb{I}^{\mathcal{N}_{G_B}(m)}$ 中的基。任意选定 $0 < \epsilon < p_m$，选定一个 $B_m' \subset B_m$ 满足 $\mu(B_m') = p_m - \epsilon$。令 $B_m'' = B_m \setminus B_m'$。令二部图 $G_B' = ([m+1], [n], E)$ 满足

对于任意的$i \in L(G_B) \subset L(G'_B)$，$\mathcal{N}_{G'_B}(i) = \mathcal{N}_{G_B}(i)$且对于$m+1 \in L(G'_B)$，$\mathcal{N}_{G'_B}(m+1) = \mathcal{N}_{G_B}(m)$。令$\mathcal{A}' = \{A_1, ..., A_{m-1}, A'_m, A'_{m+1}\}$，其中柱体$A'_m$和$A'_{m+1}$的基分别为$B'_m$和$B''_m$。容易验证，$\mathcal{A}'$相对于$G'_B$是互斥的，且$\mu(\mathcal{A}') = (p_1, ..., p_{m-1}, p_m - \epsilon, \epsilon)$。由引理3.20，$\mu(\cup_{A \in \mathcal{A}''} A) < \mu(\cup_{A \in \mathcal{A}'} A) \leq 1$，其中$\mathcal{A}'' = \{A_1, ..., A_{m-1}, A'_m\}$。容易验证，$\mathcal{A}''$相对于$G_B$是互斥的，且$\mu(\mathcal{A}'') = \mathbf{p}_\epsilon \triangleq (p_1, ..., p_{m-1}, p_m - \epsilon)$。因此，$\mathbf{p}_\epsilon \in \mathcal{VI}(G_B)$。因为$\epsilon$可以任意小，我们有$\mathbf{p} \in \mathcal{VI}(G_B) \cup \mathcal{V}\partial(G_B)$。 □

如下引理是证明定理3.25的关键。直观的说，它表明了只有当事件集互斥时，总体的概率才会取到极大值。当事件集互斥时总体概率最大是由 (Shearer, 1985, 定理 1) 证明的，这里我们将证明“只有”事件集互斥时，总体的概率才能最大。这里的证明受到了 (Shearer, 1985, 定理 1) 的证明的启发。

引理 3.22. 假设图G_D是事件集$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$的依赖图，$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \mathbb{P}(\mathcal{B})$，且$\mathcal{B}$是互斥的。则有$\mathbb{P}(\cup_{A \in \mathcal{A}} A) \leq \mathbb{P}(\cup_{B \in \mathcal{B}} B)$，且等号只有在$\mathcal{A}$也是互斥时取得。

证明. Shearer (1985) 证明了$\mathbb{P}(\cup_{A \in \mathcal{A}} A) \leq \mathbb{P}(\cup_{B \in \mathcal{B}} B)$，因此，我们只需证明等号只有在$\mathcal{A}$也是互斥时取得。

假设$G_D = ([m], E)$，$\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_m\}$，且$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = (p_1, ..., p_m)$。我们将使用与 (Shearer, 1985, 定理 1) 的证明相同的记号。对于任意的$S \subseteq [m]$，令$\alpha(S) = \mathbb{P}(\cap_{i \in S} \overline{A_i})$，$\beta(S) = \mathbb{P}(\cap_{i \in S} \overline{B_i})$。分类讨论如下。

情况 1：$\beta([m]) > 0$。假设事件集$\mathcal{A}$不是互斥的。

我们首先通过对$|S|$进行归纳证明$\alpha(S)/\beta(S)$随着S中元素的增加单调递增。首先，归纳基础是成立的，因为$\alpha(\emptyset) = \beta(\emptyset)$且$\alpha(S) = \beta(S)$在$S$只包含一个元素时成立。归纳如下。给定$S_1 \subset [m]$和$j \in [m] \setminus S_1$，令$S_2 = S_1 \cup \{j\}$，$T_2 = S_1 \cap \Gamma_j$，$T_1 = S_1 \setminus T_2$。我们有

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(S_2)}{\beta(S_2)} - \frac{\alpha(S_1)}{\beta(S_1)} &\geq \frac{\alpha(S_1) - p_j \alpha(T_1)}{\beta(S_1) - p_j \beta(T_1)} - \frac{\alpha(S_1)}{\beta(S_1)} \\ &= \frac{p_j \beta(T_1)}{\beta(S_1) - p_j \beta(T_1)} \left[\frac{\alpha(S_1)}{\beta(S_1)} - \frac{\alpha(T_1)}{\beta(T_1)} \right] \geq 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

最后一个不等式成立是由归纳假设。第一个不等式成立，是因为一方面

$$\begin{aligned} \alpha(S_2) = &\ \mathbb{P}(\cap_{i \in S_2} \overline{A_i}) = \mathbb{P}(\cap_{i \in S_1} \overline{A_i}) - \mathbb{P}(\cap_{i \in S_1} \overline{A_i} \cap A_j) \\ = &\ \mathbb{P}(\cap_{i \in S_1} \overline{A_i}) - \mathbb{P}(\cap_{i \in T_1} \overline{A_i} \cap A_j) + \mathbb{P}(\cap_{i \in T_1} \overline{A_i} \cap A_j \cap (\cup_{i \in T_2} A_i)) \\ \geq &\ \mathbb{P}(\cap_{i \in S_1} \overline{A_i}) - \mathbb{P}(\cap_{i \in T_1} \overline{A_i} \cap A_j) = \alpha(S_1) - p_j \alpha(T_1), \end{aligned} \tag{3.3}$$

另一方面，类似于式 (3.3)，由$\mathcal{B}$互斥可证明$\beta(S_2) = \beta(S_1) - p_j \beta(T_1)$成立。因此，$\alpha(S)/\beta(S)$随着$S$中元素的增加单调递增。

考虑如下特殊的例子。选取 $i,j\in[m]$ 使得 $j\in\Gamma_i$ 且 $\mathbb{P}(A_i\cap A_j)>0$。这样的 i,j 一定存在是因为我们假设 $\mathcal{A}$ 不是互斥的。将 (3.2) 应用到 $S_1=\{i\},S_2=\{i,j\}$, $T_2=\{i\},T_1=\emptyset$。在这个例子中，可以验证 (3.3) 中"$\geq$"其实一定是"$>$"，则 (3.2) 中的"$\geq$"其实也一定是"$>$"。因此，$\frac{\alpha(S_2)}{\beta(S_2)}>\frac{\alpha(S_1)}{\beta(S_1)}=1$。又考虑到 $\alpha(S)/\beta(S)$ 的单调性，我们有 $\frac{\alpha([m])}{\beta([m])}>1$。因此，$\alpha([m])>\beta([m])$。

情况 2：$\beta([m])=0$。假设 $\mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}}A)=\mathbb{P}(\cup_{B\in\mathcal{B}}B)$ 且 $\mathcal{A}$ 不是互斥的。我们将导出矛盾。

令 $S_2=[m]$。因为 $\mathcal{A}$ 不是互斥的，则存在 $j\in[m]$ 使得 $\mathbb{P}(A_j\cap(\cup_{i\in\Gamma_j}A_i))>0$。令 $S_1=S_2\setminus\{j\},T_1=S_1\setminus\Gamma_j,T_2=S_1\setminus T_1=\Gamma_j$。则我们有如下性质 Q_1 成立:

Q_1：$T_2\neq\emptyset$ 且 $\mathbb{P}(A_j\cap(\cup_{i\in T_2}A_i))>0$。

又因为

$$
\begin{aligned}
0=\alpha(S_2)\geq\ & \alpha(S_1)-p_j\alpha(T_1)=\frac{\alpha(S_1)}{\beta(S_1)}\left(\beta(S_1)-p_j\alpha(T_1)\frac{\beta(S_1)}{\alpha(S_1)}\right)\\
\geq\ & \frac{\alpha(S_1)}{\beta(S_1)}(\beta(S_1)-p_j\beta(T_1))=\frac{\alpha(S_1)}{\beta(S_1)}\beta(S_2)=0.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

其中分母 $\beta(S_1)>0$ 是因为引理3.20。(3.4) 中的第一个不等式是因为 (3.3)。第二个不等式是因为由 $\frac{\alpha(S)}{\beta(S)}$ 的单调性，我们有 $\frac{\alpha(S_1)}{\beta(S_1)}\geq\frac{\alpha(T_1)}{\beta(T_1)}$。由 (3.4) 成立，我们有上述的两个不等式其实都是等式。因此，我们有如下的两个性质 Q_2,Q_3:

Q_2：$\frac{\alpha(S_1)}{\beta(S_1)}=\frac{\alpha(T_1)}{\beta(T_1)}$。

Q_3：$\mathbb{P}(\cap_{i\in T_1}\overline{A_i}\cap A_j\cap(\cup_{i\in T_2}A_i))=0$。

因此，对本引理的证明可以归结到如下断言的证明。

断言: 对于任意的 $S_2\subseteq[m]$ 和 $j\in S_2$，令 $S_1=S_2\setminus\{j\},T_1=S_1\setminus\Gamma_j,T_2=S_1\setminus T_1$。则性质 Q_1,Q_2,Q_3 不可能同时成立。

对断言的证明：我们对 T_1 的大小做归纳。

归纳基础: $T_1=\emptyset$。由 Q_3 有，$0=\mathbb{P}(\cap_{i\in T_1}\overline{A_i}\cap A_j\cap(\cup_{i\in T_2}A_i))=\mathbb{P}(A_j\cap(\cup_{i\in T_2}A_i))$，这同性质 Q_1 相矛盾。

归纳假设：断言对 $|T_1|<t$ 成立。

归纳：考虑 $|T_1|=t$ 的情况，反证如下。假设性质 Q_1,Q_2,Q_3 同时成立。

由 Q_1 有，存在 $j'\in T_2$ 使得 $\mathbb{P}(A_j\cap A_{j'})>0$。

我们首先证明 $T_1\cap\Gamma_{j'}\neq\emptyset$。这是因为，如果 $T_1\cap\Gamma_{j'}=\emptyset$，则

$$
\begin{aligned}
0\ & \overset{\text{by } Q_3}{=} \mathbb{P}(\cap_{i\in T_1}\overline{A_i}\cap A_j\cap(\cup_{i\in T_2}A_i))\geq\mathbb{P}(\cap_{i\in T_1}\overline{A_i}\cap A_j\cap A_{j'})\\
& \overset{\text{by } T_1\cap\Gamma_{j'}=\emptyset}{=} \mathbb{P}(\cap_{i\in T_1}\overline{A_i})\mathbb{P}(A_j\cap A_{j'})>0,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

由此导出矛盾。由 (3.5) 有，Q_3 成立意味着

$$\mathbb{P}(\cap_{i\in T_1}\overline{A_i}\cap A_j\cap A_{j'})=0. \tag{3.6}$$

接下来，我们证明 $\mathbb{P}(A_{j'}\cap(\cup_{i\in T_1\cap\Gamma_{j'}}A_i))>0$。这是因为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_{j'}\cap(\cup_{i\in T_1\cap\Gamma_{j'}}A_i))\\
\geq\ &\mathbb{P}(A_{j'}\cap(\cup_{i\in T_1\cap\Gamma_{j'}}A_i)\cap A_j\cap_{k\in T_1\setminus\Gamma_{j'}}\overline{A_k})\\
\overset{\text{by (3.6)}}{=}\ &\mathbb{P}(A_{j'}\cap(\cup_{i\in T_1\cap\Gamma_{j'}}A_i)\cap A_j\cap_{k\in T_1\setminus\Gamma_{j'}}\overline{A_k})+\mathbb{P}(\cap_{i\in T_1}\overline{A_i}\cap A_j\cap A_{j'})\\
=\ &\mathbb{P}(A_j\cap A_{j'}\cap_{k\in T_1\setminus\Gamma_{j'}}\overline{A_k})\\
=\ &\mathbb{P}(A_j\cap A_{j'})\mathbb{P}(\cap_{k\in T_1\setminus\Gamma_{j'}}\overline{A_k})>0.
\end{aligned}$$

令 $S_2'\triangleq T_1\cup\{j'\},S_1'\triangleq T_1,T_1'\triangleq S_1'\setminus\Gamma_{j'},T_2'\triangleq S_1'\setminus T_1'=T_1\cap\Gamma_{j'}$。我们已经证明

Q_1'：$T_2'\neq\emptyset$ 且 $\mathbb{P}(A_{j'}\cap(\cup_{i\in T_2'}A_i))>0$。

现在，我们来证明其他两个性质。

一方面，我们有 $\frac{\alpha(S_2')}{\beta(S_2')}-\frac{\alpha(S_1')}{\beta(S_1')}=0$ 成立，因为：$S_1'=T_1$，$S_2'\subseteq S_1$，$\frac{\alpha(S)}{\beta(S)}$ 是单调的，且 Q_2 成立。

另一方面，由 (3.2) 有，

$$\frac{\alpha(S_2')}{\beta(S_2')}-\frac{\alpha(S_1')}{\beta(S_1')}\geq\frac{\alpha(S_1')-p_{j'}\alpha(T_1')}{\beta(S_1')-p_{j'}\beta(T_1')}-\frac{\alpha(S_1')}{\beta(S_1')}=\frac{p_{j'}\beta(T_1')}{\beta(S_1')-p_{j'}\beta(T_1')}\left[\frac{\alpha(S_1')}{\beta(S_1')}-\frac{\alpha(T_1')}{\beta(T_1')}\right]\geq 0.$$

综合上述两个方面，我们有上式中所有的不等号其实是等号，因此，$\alpha(S_2')=\alpha(S_1')-p_{j'}\alpha(T_1')$，且

Q_2'：$\frac{\alpha(S_1')}{\beta(S_1')}=\frac{\alpha(T_1')}{\beta(T_1')}$。

将 (3.3) 应用到 S_2' 有，等式 $\alpha(S_2')=\alpha(S_1')-p_{j'}\alpha(T_1')$ 意味着

Q_3'：$\mathbb{P}(\cap_{i\in T_1'}\overline{A_i}\cap A_{j'}\cap(\cup_{i\in T_2'}A_i))=0$。

综上所述，有性质 Q_1',Q_2',Q_3' 对 S_2',j',S_1',T_1',T_2' 成立。

然而，因为 $|T_1'|<|T_1|=t$，由归纳假设，性质 Q_1',Q_2',Q_3' 不可能同时成立。由此导出矛盾。**断言证毕**。 □

直觉上，如下引理证明了，当一个事件集中的所有事件成比例地减小时，可以保持依赖图和互斥性不变，且所有事件的并的概率最多线性递减。为了减小某个事件 A，我们对每个事件构造一个新的柱体，其高度为 1，基为原来的事件。之后，我们把以 A 为基的柱体的高度调节为 λ。把这些新的柱体当作新的事件。重复上述过程，直到所有原始事件都被处理过。

引理 3.23. *给定依赖图 $G_D = ([m], E)$ 和概率向量 $\mathbf{p} \in (0,1]^m$，假设事件集 $\mathcal{A} \sim_a G_D$ 且 $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$。对于任意的 $\lambda \in (0,1)$，存在一个概率为 $\mathbb{P}(\mathcal{B}) = \lambda\mathbf{p}$ 的事件集 $\mathcal{B} \sim_a G_D$ 满足*

1. 如果 $\mathcal{A}$ 是互斥的，则 $\mathcal{B}$ 也是；

2. $\mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}} A) - (1-\lambda)\sum_{i\in[m]} p_i \le \mathbb{P}(\cup_{B\in\mathcal{B}} B) \le \mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}} A)$。

证明. 假设 $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_m\}$。令 $\mathcal{S}^{(0)}$ 为事件集 $\mathcal{A}$ 中的事件所在的概率空间。令概率空间 $\mathcal{S}^{(1)} = \mathcal{S}^{(0)} \times \mathbb{I}$，其中 $\mathbb{I}$ 是嵌入了勒贝格测度的单位 $[0,1]$ 区间。令 $\mathcal{A}^{(1)}$ 是 $\mathcal{S}^{(1)}$ 中的事件集，其中 $A_1^{(1)} = A_1 \times [0,\lambda]$ 且对于任意的 $k \ne 1$，$A_k^{(1)} = A_k \times \mathbb{I}$。令 $\mathbf{p}^{(1)} = (\lambda p_1, p_2, ..., p_m)$。容易验证 $\mathcal{A}^{(1)} \sim_a G_D$，$\mathbb{P}(\mathcal{A}^{(1)}) = \mathbf{p}^{(1)}$，且 $\mathbb{P}(\cup_{i\in[m]} A_i^{(1)}) \ge \mathbb{P}(\cup_{i\in[m]} A_i) - (1-\lambda)p_1$。

类似的，定义概率空间 $\mathcal{S}^{(2)} = \mathcal{S}^{(1)} \times \mathbb{I}$，事件集 $\mathcal{A}^{(2)}$ 在 $\mathcal{S}^{(2)}$ 中，且满足 $A_2^{(2)} = A_2^{(1)} \times [0,\lambda]$，对于任意的 $k \ne 2$，$A_k^{(2)} = A_k^{(1)} \times \mathbb{I}$。令 $\mathbf{p}^{(2)} = (\lambda p_1, \lambda p_2, p_3, ..., p_m)$。我们有 $\mathcal{A}^{(2)} \sim_a G_D$，$\mathbb{P}(\mathcal{A}^{(2)}) = \mathbf{p}^{(2)}$，且 $\mathbb{P}(\cup_{i\in[m]} A_i^{(2)}) \ge \mathbb{P}(\cup_{i\in[m]} A_i) - (1-\lambda)(p_1 + p_2)$。

如此迭代下去，最终我们将得到 $\mathcal{A}^{(m)} = (A_1^{(m)}, ..., A_m^{(m)}) \sim_a G_D$，$\mathbb{P}(\mathcal{A}^{(m)}) = \mathbf{p}^{(m)} = \lambda\mathbf{p}$，且 $\mathbb{P}(\cup_{i\in[m]} A_i^{(m)}) \ge \mathbb{P}(\cup_{i\in[m]} A_i) - (1-\lambda)\sum_{i\in[m]} p_i$。

容易验证，

1. 如果 $\mathcal{A}$ 是互斥的，则对于任意的 $i \in [m]$，$\mathcal{A}^{(i)}$ 也是互斥的；
2. 对于任意的 $i \in [m]$，$\mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}^{(i)}} A) \le \mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}} A)$。

令 $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{(m)}$。我们有引理成立。 □

接下来，我们将证明引理3.1在依赖图上的版本。

引理 3.24. *给定依赖图 $G_D = ([m], E)$ 和概率向量 $\mathbf{p} \in (0,1)^m$，存在一个唯一的 $\lambda > 0$ 使得 $\lambda\mathbf{p} \in \partial(G_D)$。*

证明. 任意选定一个依赖图 $G_D = ([m], E)$ 和概率向量 $\mathbf{p} \in (0,1)^m$。令 $\Lambda \triangleq \{\lambda > 0 : \lambda\mathbf{p} \notin \mathcal{I}(G_D)\}$。

容易验证：

1. 如果 λ 足够大使得 $\lambda\mathbf{p}$ 中有一个元素等于 1，则对任意满足 $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \phi(\lambda\mathbf{p})$ 的事件集 $\mathcal{A} \sim_a G_D$，$\mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}} A) = 1$ 成立。

2. 如果 λ 足够小使得 $\lambda\mathbf{p}$ 的 l_1-范数小于 1，则对任意满足 $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \lambda\mathbf{p}$ 的事件集 $\mathcal{A} \sim_a G_D$，$\mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}} A) < 1$ 成立。

因此，Λ 非空，且其下确界，λ_0，一定为证。令 $\mathbf{q} = \lambda_0\mathbf{p}$。为了证明 $\mathbf{q} \in \partial(G_D)$，考虑任意实数 $\epsilon > 0$。

一方面，因为 $\lambda_0 = \inf\Lambda$，我们有 $(1-\epsilon)\mathbf{q} \in \mathcal{I}(G_D)$。

另一方面，为了导出矛盾，假设 $(1+\epsilon)\mathbf{q} \in \mathcal{I}(G_D)$。由引理3.19，我们可以选定一个互斥的事件集 $\mathcal{A} \sim_a G_D$ 使得 $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = (1+\epsilon)\mathbf{q}$ 且 $\mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) < 1$。由引理 3.23，对于任意的 $0 < \delta < 1$，存在一个互斥的事件集 $\mathcal{A}_\delta \sim_a G_D$ 使得 $\mathbb{P}(\mathcal{A}_\delta) = \delta(1+\epsilon)\mathbf{q}$ 且 $\mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}_\delta}A) < \mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) < 1$。由引理3.22，对于任意的概率为 $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \delta(1+\epsilon)\mathbf{q}$ 的事件集 $\mathcal{A} \sim_a G_D$，$\mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) < 1$ 成立。因此，$\delta(1+\epsilon)\mathbf{q} \in \mathcal{I}(G_D)$，这意味着 $\delta(1+\epsilon)\lambda_0 \notin \Lambda$。因为 δ 在 $(0,1)$ 上取值，我们有 $(0,(1+\epsilon)\lambda_0) \cap \Lambda = \emptyset$，这同 $\lambda_0 = \inf\Lambda$ 相矛盾。因此，我们有 $(1+\epsilon)\mathbf{q} \notin \mathcal{I}(G_D)$。

综上所述，$\lambda_0\mathbf{p} \in \partial(G_D)$。由抽象边界向量的定义，$\lambda_0$ 的唯一性是显然的。 □

现在，我们可以来证明本小节的主定理。

定理 3.25. *给定二部图 G_B 和由正实数构成的概率向量 $\mathbf{p}$，如下三个条件等价：*

1. 对于任意满足 $\lambda\mathbf{p} \in \mathcal{V}\mathcal{I}(G_B)$ 的 λ，存在一个互斥的由变量生成的事件系统 $\mathcal{A}$，其事件-变量图为 G_B，概率向量为 $\lambda\mathbf{p}$。

2. 对于任意满足 $\lambda\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$ 的 λ，存在一个互斥的由变量生成的事件系统 $\mathcal{A}$，其事件-变量图为 G_B，概率向量为 $\lambda\mathbf{p}$。

3. 二部图 G_B 在方向 $\mathbf{p}$ 上是没有差异的。

证明. $(1 \Rightarrow 3)$：任意选定 $\lambda > 0$ 使得 $\mathbf{q} \triangleq \lambda\mathbf{p} \in \mathcal{V}\mathcal{I}(G_B)$ 成立。令 $\mathcal{A} \sim G_B$ 为一个满足 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{q}$ 且 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) < 1$ 的互斥的柱体集。容易验证，$\mathcal{A}$ 相对于基图 $G_D(G_B)$ 也是互斥的。因为 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) < 1$，由引理3.22有，对于任意的概率为 $\mathbb{P}(\mathcal{B}) = \mathbf{q}$ 的事件集 $\mathcal{B} \sim_a G_D(G_B)$，$\mu(\cup_{B\in\mathcal{B}}B) < 1$ 成立。因此，$\mathbf{q} \in \mathcal{I}(G_B)$。综上所述，$G_B$ 在方向 $\mathbf{p}$ 上是没有差异的。

$(3 \Rightarrow 2)$：假设 G_B 在方向 $\mathbf{p}$ 上是没有差异的。令 λ 满足 $\mathbf{q} \triangleq \lambda\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$。由定理3.6有，存在一个柱体集 $\mathcal{A} \sim G_B$ 满足 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{q}$ 且 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) = 1$。另一方面，由 G_B 在方向 $\mathbf{p}$ 上是没有差异的，我们有 $\mathbf{q} \in \partial(G_B)$。由引理3.19，存在一个互斥的柱体集 $\mathcal{B} \sim_a G_D(G_B)$ 满足 $\mu(\mathcal{B}) = \mathbf{q}$ 且 $\mathbb{P}(\cup_{B\in\mathcal{B}}B) = 1$。因为 $\mathcal{A} \sim G_D(G_B)$ 且 $\mathbb{P}(\cup_{B\in\mathcal{B}}B) = \mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) = 1$，由引理3.22有，$\mathcal{A}$ 相对于 $G_D(G_B)$ 也一定是互斥的。因此，其相对于 G_B 也是互斥的。

$(2 \Rightarrow 1)$：任意选定 $\lambda > 0$ 满足 $\mathbf{q} \triangleq \lambda\mathbf{p} \in \mathcal{V}\mathcal{I}(G_B)$。令 $\delta > 1$ 满足 $\delta\lambda\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$。任意选定一个互斥的柱体集 $\mathcal{A} \sim G_B$ 满足 $\mu(\mathcal{A}) = \delta\lambda\mathbf{p}$。令 $\mathcal{A} =$

$\{A_1, ..., A_m\}$。对于任意的 $i \in L(G_B)$，令 B_i 为 A_i 的基，其中 $\dim(B_i) = \mathcal{N}(i)$。对于每一个 B_i，任意选定一个测度为 $\mu(B_i') = \mu(B_i)/\delta$ 的子集 $B_i' \subset B_i$。令 $\mathcal{A}' = \{A_1', ..., A_m'\}$，其中 A_i' 是以 B_i' 为基的柱体。容易验证，$\mathcal{A}' \sim G_B$，$\mu(\mathcal{A}') = \mathbf{q}$，且 $\mathcal{A}'$ 是互斥的。 □

定理3.25使得我们不必计算 Shearer 界就可以判断一个二部图是否有差异。

注. 给定一个二部图 $G_B = ([m], [n], E)$ 和概率向量 $\mathbf{p} \in (0,1)^m$，考虑如下三个有特殊意义的实数：λ_1, λ_2 分别满足 $\lambda_1\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$ 和 $\lambda_2\mathbf{p} \in \partial(G_D(G_B))$，$\lambda_3$ 是使得测度为 $\mu(\mathcal{A}) = \lambda\mathbf{p}$ 的互斥柱体集 $\mathcal{A} \sim G_B$ 存在的最大的 λ。不难看出，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$。定理3.25的一个等价形式是，$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 要么全相等，要么两两不同。

3.4.2 推导规则

给定一个二部图 G_B，我们定义如下六种对 G_B 的操作。

1. 删叶子变量：删除一个满足 $|\mathcal{N}(j)| \leq 1$ 的顶点 $j \in R(G_B)$，并移除所有与之相邻的边。

2. 删叶子事件：删除一个满足 $|\mathcal{N}(i)| \leq 1$ 的顶点 $i \in L(G_B)$，并移除所有与之相邻的边。

3. 复制事件：给定一个顶点 $i \in L(G_B)$，向 $L(G_B)$ 中添加一个顶点 i'，添加与 i' 相邻的边，使得 $\mathcal{N}(i') = \mathcal{N}(i)$。

4. 复制变量：给定一个顶点 $j \in R(G_B)$，向 $R(G_B)$ 中添加一个顶点 j'，添加与 j' 相邻的边，使得 $\mathcal{N}(j') \subseteq \mathcal{N}(j)$。

5. 删边：在保证基图不改变的前提下，从 E 中删除一条边。

6. 删事件：删除一个顶点 $i \in L(G_B)$，并移除所有与之相邻的边。

同时，我们也定义上述操作的逆操作。一个操作 O 的逆操作 O' 满足对于任意的 G_B，$O'(O(G_B)) = O(O'(G_B)) = G_B$ 成立。

接下来的定理将刻画这些操作如何影响变量版本与抽象版本是否有差异。

定理 3.26. *一个二部图 G_B 变量版本与抽象版本有差异，当且仅当它在应用了删叶子变量，删叶子事件，复制事件，复制变量及这些操作的逆操作之后依然是有差异的。*

证明. (删叶子变量)：正确性是显然的。

(删叶子事件)：正确性易证。

(复制事件): 不失一般性, 假设顶点 $m+1$ 被添加到了 $L(G_B)$ 之中, 且 $\mathcal{N}(m+1) = \mathcal{N}(m)$。令 $G'_B = ([m+1],[n],E')$ 为添加了顶点 $m+1$ 后的二部图。

一方面, 假设 G_B 是没有差异的。任意选定 $\mathbf{p}'$。令 $\mathbf{p} = (p'_1,...,p'_{m-1},p'_m+p'_{m+1})$。由引理3.1, 我们有存在一个唯一的 $\lambda > 0$ 使得 $\lambda\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$。由定理3.25, 我们有在 $\mathbb{I}^n$ 中存在一个互斥的柱体集 $\mathcal{A} = \{A_1,...,A_m\}$ 使得 $\mathcal{A} \sim G_B$ 且 $\mu(\mathcal{A}) = \lambda\mathbf{p}$。将柱体 A_m 划分成两个互斥的柱体 A'_m 和 A'_{m+1}, 使得 $\mu(A'_m) = \lambda p'_m$, $\mu(A'_{m+1}) = \lambda p'_{m+1}$。令 $\mathcal{A}' = \{A_1,...,A_{m-1},A'_m,A'_{m+1}\}$。容易验证, $\mathcal{A}'$ 相对于 G'_B 是互斥的, $\mu(\mathcal{A}') = \lambda\mathbf{p}'$, 且 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}'}A) = 1$。由定理3.25有, G'_B 没有差异。

另一方面, 假设 G'_B 有差异。任意选定 $\mathbf{p}$。令 $\mathbf{p}' = (p_1,...,p_{m-1},p'_m,p'_{m+1})$ 满足 $p'_m + p'_{m+1} = p_m$。由引理3.1, 我们有存在一个唯一的 $\lambda > 0$ 使得 $\lambda\mathbf{p}' \in \mathcal{V}\partial(G'_B)$。由定理3.25, 我们有在 $\mathbb{I}^n$ 中存在一个互斥的柱体集 $\mathcal{A}' = \{A'_1,...,A'_m,A'_{m+1}\}$ 满足 $\mathcal{A}' \sim G'_B$ 且 $\mu(\mathcal{A}') = \lambda\mathbf{p}'$。因为 $\mathcal{A}'$ 相对于 G'_B 是互斥的, 我们有 $\mu(A'_m \cap A'_{m+1}) = 0$。令 $\mathcal{A} = \{A'_1,...,A'_m \cup A'_{m+1}\}$。容易验证 $\mathcal{A}$ 相对于 G_B 是互斥的, $\mu(\mathcal{A}) = \lambda\mathbf{p}$, 且 $\mu(\cup_{A\in\mathcal{A}}A) = 1$。由定理3.25有, G_B 没有差异。

(复制变量): 不失一般性, 假设顶点 $n+1$ 被添加到了 $R(G_B)$ 之中且 $\mathcal{N}(n+1) \subseteq \mathcal{N}(n)$。令 $G'_B = ([m],[n+1],E')$ 为添加了顶点 $n+1$ 后的二部图。因为 $G_D(G_B) = G_D(G'_B)$, 我们只需证明 $\mathcal{V}\partial(G_B) = \mathcal{V}\partial(G'_B)$。任意选定 $\mathbf{p} \in (0,1)^m$。假设 $\lambda\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$ 且 $\lambda'\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G'_B)$。

因为 $\lambda\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$, 我们有存在一个 $\mathbb{I}^n$ 中的柱体集 $\mathcal{A} = \{A_1,...,A_m\}$ 满足 $\mathcal{A} \sim G_B$, $\mu(\mathcal{A}) = \lambda\mathbf{p}$, 且 $\mu(\cup_{i\in[m]}A_i) = 1$。对于任意的 $i \in [m]$, 令 $A'_i = A_i \times \mathbb{I}^{\{n+1\}}$。令 $\mathcal{A}' = \{A'_1,...,A'_m\}$。我们有 $\mathcal{A}' \sim G'_B$, $\mu(\mathcal{A}') = \lambda\mathbf{p}$, 且 $\mu(\cup_{i\in[m]}A'_i) = 1$, 因此 $\lambda' \leq \lambda$。

另一方面, 因为 $\lambda'\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G'_B)$, 我们有存在一个 $\mathbb{I}^{n+1}$ 中的离散柱体集满足 $\mathcal{A}' = \{A'_1,...,A'_m\}$, $\mathcal{A}' \sim G'_B$, $\mu(\mathcal{A}') = \lambda'\mathbf{p}$ 且 $\mu(\cup_{i\in[m]}A'_i) = 1$。由这个柱体集是离散的, 我们有 $\mathbb{I}^{\{n,n+1\}}$ 可以被划分成 K 个互斥的矩形 $\Delta_1,...,\Delta_K$, 使得对每一个 $i \in [m]$ 及所有的 $k \in [K]$ 均存在集合 $A_{ik} \subseteq \mathbb{I}^{n-1}$, 满足 $A'_i = \cup_{k\in[K]}A_{ik} \times \Delta_k$。对任意的 $i \in L(G_B)\setminus\mathcal{N}(n)$, 因为 $\{n,n+1\} \cap \mathcal{N}(i) = \emptyset$, 我们有 A_{ik} 不依赖于 k, 因此可以用 B_i 来表示 A_{ik}。因为 $\mu(\cup_{i\in[m]}A'_i) = 1$, 我们有对于任意的 k, $\mu(\cup_{i\in[m]}A_{ik}) = 1$。将 $\mathbb{I}^{\{n\}}$ 划分成互斥的区间 $\Lambda_1,...,\Lambda_K$ 使得对于任意的 k, $\mu(\Lambda_k) = \mu(\Delta_k)$。令 $\mathcal{A} = \{A_1,...,A_m\}$ 为 $\mathbb{I}^n$ 中的柱体集且满足对于任意的 $i \in \mathcal{N}(n)$, $A_i = \cup_{k\in[K]}A_{ik} \times \Lambda_k$, 对于 $i \in L(G_B)\setminus\mathcal{N}(n)$, $A_i = B_i \times \mathbb{I}^n = A'_i$。容易验证, $\mathcal{A} \sim G_B$, $\mu(\mathcal{A}) = \lambda'\mathbf{p},$, 且 $\mu(\cup_{i\in[m]}A_i) = 1$。因此, $\lambda \leq \lambda'$。

因此，$\mathcal{V}\partial(G_B) = \mathcal{V}\partial(G'_B)$。又因为 $G_D(G_B) = G_D(G'_B)$，则 G_B 是无差异的当且仅当 G'_B 是无差异的。

□

定理 3.27. 一个变量版本与抽象版本无差异的二部图在应用了删事件操作和删边的逆操作之后依然是无差异的。

定理 3.28. 一个变量版本与抽象版本有差异的二部图在应用了删边操作和删事件的逆操作之后依然是有差异的。

以上两个定理的证明和定理3.26类似，这里略去。

组合使用上述这些操作可以得到很有趣的结果，例如如下两个推论。

定义 3.9 (组合二部图)**.** 给定两个正整数 $m < n$，令 $G_{n,m} = ([\binom{n}{m}], [n], E_{n,m})$，其中 $(i,j) \in E_{n,m}$ 当且仅当 j 在 $[n]$ 的第 i 个大小为 m 的子集之中。$G_{n,m}$ 被称为 (n,m)-组合二部图。

推论 3.29. 如果 $G_{n,m}$ 是没有差异的，则对于任意的整数 $c \geq 1$，$G_{n+c,m+c}$ 也是没有差异的。

证明. 因为 $c > 1$ 的情况是 $c = 1$ 的情况的直接推论，因此我们只需证明 $c = 1$ 的情况。

在推论3.40中，我们将证明如果 $7m \leq 5n$，则 $G_{n,m}$ 一定是有差异的。如果 $2m < n + 1$，我们有 $7m \leq 5n$，则 $G_{n,m}$ 一定是有差异的。因此，接下来我们只考虑 $2m \geq n + 1$ 的情况。此时，$G_{n+c,m+c}$ 的基图是一个完全图。

首先，按如下方式对 $G_{n+1,m+1}$ 应用删边操作。对于每一个顶点 $i \in [\binom{n+1}{m+1}]$，如果 $(i, n+1) \in E_{n+1,m+1}$，则删除 $(i, n+1)$。否则，删除与 i 相邻的任意一条边。因为 $2m \geq n + 1$，删边后得到的二部图的基图保持不变，依然是一个完全图。

然后，向得到的二部图应用删叶子变量操作，即删除顶点 $n + 1$。

最后，向得到的二部图应用复制事件的逆操作。

对 $[n]$ 的任意一个大小为 m 的子集 S，假设集合 $S \cup \{n + 1\}$ 是 $[\binom{n+1}{m+1}]$ 中的第 i 个元素。则在对 i 应用删边操作之后，i 的邻居集合恰好是 S。这意味着最终的二部图恰好是 $G_{n,m}$。因为 $G_{n,m}$ 是无差异的，由定理3.26和定理3.28，我们有 $G_{n+1,m+1}$ 也是无差异的。 □

推论 3.30. 如果 $G_{n,m}$ 是有差异的，则对于任意的整数 $c \geq 1$，$G_{cn,cm}$ 也是有差异的。

证明. 我们对 $G_{cn,cm}$ 应用如下两步操作。

首先，对 $G_{cn,cm}$ 应用删事件操作。对 $[n]$ 的任意一个大小为 m 的子集 S，令 $f(S) = \cup_{i\in S}\{ki : k \in [c]\}$。任意选定一个这样的集合 S，从 $L(G_{cn,cm})$ 删除除 $f(S)$ 之外的所有顶点。令 G'_B 为得到的二部图。

其次，对 G'_B 应用复制变量的逆操作。容易验证，对于任意满足 $k_1, k_2 \in [c], j \in [n]$ 的 $k_1 j, k_2 j \in R(G'_B)$，$\mathcal{N}_{G'_B}(k_1 j) = \mathcal{N}_{G'_B}(k_2 j)$。因此，从 $R(G'_B)$ 删除 $R(G'_B) \setminus [n]$ 中的所有顶点不改变二部图是否有差异。

容易验证，最终的二部图即是 $G_{n,m}$。因为 $G_{n,m}$ 有差异，由定理3.26及3.27，我们有 $G_{cn,cm}$ 也是有差异的。 □

定义 3.10 (稀疏二部图)**.** 我们称 $G'_B = ([m'], [n'], E')$ 为 $G_B = ([m], [n], E)$ 的稀疏二部图当且仅当 $[m'] = [m], [n'] \subseteq [n], E' \subseteq E$ 且它们的基图是相同的。

由定理3.26及3.27，我们有如果 G_B 有差异，则 G_B 的所有稀疏二部图都是有差异的。应用推论3.30，我们有如下结论。

推论 3.31. 如果 $G_{n,m}$ 有差异，则对于任意的整数 $c \geq 1$，$G_{cn,cm}$ 的所有稀疏二部图都是有差异的。

3.5 差异的存在性和圈之间的关系

在本小节中，我们将证明一个二部图是有差异的几乎等价于其基图存在一个圈。没有完全刻画清楚的唯一情况就是二部图中不含有任何圈二部图，但它的基图中有大小为 3 的团。这种情况下的许多例子都是没有差异的，但我们找到了一个有差异的例子。

我们也从依赖图的角度研究了是否存在差异。即，一个依赖图是有差异的，当且仅当其对应的某个二部图是有差异的。一个依赖图是强有差异的，当且仅当其对应的所有二部图都是有差异的。对强有差异的刻画是从Kolipaka 和 Szegedy (2011) 的工作开始的，已经开放了多年。

3.5.1 有差异不等价于包含圈二部图

首先，我们证明如果一个二部图是树，则其没有差异。在第5.3节中，我们还将显式地给出树的变量边界。

定理 3.32. 如果二部图 G_B 是一棵树，则 G_B 变量版本和抽象版本无差异。

证明. 通过对 G_B 反复使用删叶子变量和删叶子事件操作，我们最终会得到图 $G_B' = ([1],[1],\{(1,1)\})$。显然，$G_B'$ 是无差异的，则由定理3.26有，原图 G_B 也无差异。 □

接下来，我们将证明所有的圈二部图都是有差异的。尽管原则上通过联合 (Shearer, 1985, 定理 1) 和第3.3节的结果，也能证明圈二部图有差异，但无论是 Shearer 的不等式系统还是定理3.17中给出的高次多项式都很难求解。因此，我们这里采用另一种方法。具体地，令 $\epsilon > 0$ 为一个足够小的常数。我们证明概率向量 $\mathbf{q} = (\frac{1}{4}+\epsilon, ..., \frac{1}{4}+\epsilon)$ 满足如下两个性质：第一，$\mathbf{q}$ 在圈二部图的变量内部；第二，不存在一个互斥的柱体集其概率向量为 $\mathbf{q}$。由定理3.25有，上述两个性质意味着定理3.33成立。

定理 3.33. 所有的圈二部图变量版本与抽象版本有差异。

证明. 我们只需考虑标准的长为 n 的圈二部图 $G_n = ([n],[n],E_n)$，其中 $E_n = \{(i,i), (i,(i+1)(\overline{\text{mod}}\ n)) : i \in [n]\}$。与之前类似，为了简化符号，在不引起歧义的前提下，我们会省略"$(\overline{\text{mod}}\ n)$"。任意选定一个正整数 $n \geq 3$。

对于任意的 $i \in [n]$，令 $A_i = \{(x_1,...,x_n) : \frac{1}{2} \leq x_i \leq 1, 0 \leq x_{i+1} < \frac{1}{2}\}$。令 $\mathcal{A} = \{A_1,...,A_n\}$，且 $\mathbf{p} = (\frac{1}{4},...,\frac{1}{4}) \in (0,1)^n$。容易验证 $\mathcal{A}$ 相对于 G_n 是互斥的，$\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$，且 $\mu(\cup_{i\in[n]}A_i) < 1$。任意选定 $0 < \epsilon < \frac{1}{n}(1-\mu(\cup_{i\in[n]}A_i))$。令 $\mathbf{q} = (\frac{1}{4}+\epsilon,...,\frac{1}{4}+\epsilon) \in (0,1)^n$。我们将证明如下两个断言。

断言 1：$\mathbf{q} \in \mathcal{VI}(G_n)$。

为了导出矛盾，假设存在一个柱体集 $\mathcal{B} = \{B_1,...,B_n\} \sim G_n$ 满足 $\mu(\mathcal{B}) = \mathbf{q}$ 且有 $\mathbb{P}(\cup_{i\in[n]}B_i) = 1$。对于每个 $i \in [n]$，任意选定一个柱体 B_i' 满足 $B_i' \subset B_i$，$\mu(B_i') = 1/4$ 且 B_i' 只依赖于 X_i 和 X_{i+1}。令 $\mathcal{B}' = \{B_1',...,B_n'\}$。我们有 $\mathcal{B}' \sim G_n$ 且 $\mu(\mathcal{B}') = \mathbf{p}$。一方面，$\mu(\cup_{i\in[n]}B_i') \geq 1-n\epsilon > \mu(\cup_{i\in[n]}A_i)$。另一方面，因为 $\mathcal{A}$ 是互斥的，由引理3.22有，$\mu(\cup_{i\in[n]}B_i') \leq \mu(\cup_{i\in[n]}A_i)$。由此导出矛盾。因此**断言 1 成立**。

断言 2：对于任意的测度为 $\mu(\mathcal{B}) = \mathbf{q}$ 的柱体集 $\mathcal{B} \sim G_n$，$\mathcal{B}$ 不是互斥的。

任意选定一个测度为 $\mu(\mathcal{B}) = \mathbf{q}$ 的柱体集 $\mathcal{B} = \{B_1,...,B_n\} \sim G_n$。对于每一个 $i \in [n]$，令 $\widetilde{B}_i \subset \mathbb{I}^{\{i,i+1\}}$ 表示 B_i 的基，并选定两个最小的子集 $\Delta_i' \subseteq \mathbb{I}^{\{i\}}$ 和 $\Delta_{i+1} \subseteq \mathbb{I}^{\{i+1\}}$ 使得 $\mu(\widetilde{B}_i \setminus (\Delta_i' \times \Delta_{i+1})) = 0$。令 $x_i = \mu(\Delta_i)$，$x_i' = \mu(\Delta_i')$。则 $\mu(\widetilde{B}_i \setminus (\Delta_i' \times \Delta_{i+1})) = 0$ 意味着 $x_i' x_{i+1} \geq \mu(\widetilde{B}_i) = \mu(B_i) > \frac{1}{4}$。因此，$\prod_{i=1}^{n}(x_i x_i') > \frac{1}{4^n}$。

则一定存在某个 $i \in [n]$ 使得 $x_i x_i' > \frac{1}{4}$，这说明 $x_i + x_i' > 1$。因此，$\mu(\Delta_i \cap \Delta_i') > 0$，这意味着 $\mu(B_{i-1} \cap B_i) > 0$。**断言 2 成立**。

综上所述，由定理3.25有，G_n 有差异。 □

由定理3.33，我们能得到一大类的有差异的二部图。

定义 3.11 (包含)**.** 我们称一个二部图 G_B 包含另一个二部图 G_B'，当且仅当存在映射 $\pi_L : L(G_B') \to L(G_B)$ 和 $\pi_R : R(G_B') \to R(G_B)$ 同时满足如下两个条件：

1. 对于任意的 $i \in L(G_B')$ 和 $j \in R(G_B')$，$\pi_R(j) \in \mathcal{N}_{G_B}(\pi_L(i))$ 当且仅当 $j \in \mathcal{N}_{G_B'}(i)$。

2. 对于任意的 $j \in R(G_B) \setminus \pi_R(R(G_B'))$，$i,k \in L(G_B')$，$j \notin \mathcal{N}_{G_B}(\pi_L(i)) \cap \mathcal{N}_{G_B}(\pi_L(k))$。

直觉上，G_B 包含 G_B' 意味着 G_B' 可以在不引起额外相关性的前提下被嵌入到 G_B 之中。

由定理3.26，3.27，如果一个二部图 G_B 包含另一个有差异的二部图，则 G_B 也是有差异的。由定理3.33，我们有如下结论。

推论 3.34. *所有包含圈二部图的二部图变量版本与抽象版本有差异。*

由定理3.32和推论3.34，我们很自然地有如下猜想：

猜想 3.35 (关于差异的猜想)**.** *一个二部图有差异当且仅当其包含一个圈二部图。*

我们已经证明了充分性成立。为了证明必要性，假设一个二部图 G_B 不包含任何一个圈二部图。我们分类讨论如下。

情况 1：二部图的基图是一个树。由定理3.32有，H 是无差异的。

情况 2：二部图的基图有圈。因为 G_B 不包含圈二部图，则它的基图不存在一个诱导子图是长度大于 3 的圈。因此，解决这一猜想等价于回答如下问题 Q：**如果一个二部图不包含任何的圈二部图，但其基图中有大小为 3 的团，这个二部图有差异吗？**

首先，我们看一个简单的例子，二部图 $G_B = ([3],[1],E)$，其中 $E = [3] \times [1]$。它满足问题 Q 中的条件。容易验证 $\mathcal{V}\partial(G_B) = \{(p_1,p_2,p_3) : p_1 + p_2 + p_3 = 1\} = \partial(G_D(G_B))$。因此，$G_B$ 没有差异。

为了获得更多的证据，考虑之前提到过的 (n,m)-组合二部图，$G_{n,m}$。作为一个特例，$G_{3,2}$ 是标准的长为 3 的圈二部图 G_3。一般的，我们有如下观察：

第一，$m = 1$：只有由一系列独立事件构成的事件集可以同 $G_{n,m}$ 一致。

第二，$2 \le m \le \frac{2}{3}n$：$G_{n,m}$ 包含长为 3 的圈二部图，因此它是有差异的。

第三，$m > \frac{2}{3}n$：$G_{n,m}$ 不包含圈二部图，但其基图中有大小为 3 的团，因为 $G_{n,m}$ 是一个完全图。我们主要考虑这一类二部图。

定理 3.36. $G_{4,3}$ 的变量版本与抽象版本没有差异。

证明. 由 (Shearer, 1985, 定理 1)，我们有 $\mathbf{p} \in \partial(G_{4,3})$ 当且仅当 $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$。任意选定 $\mathbf{p} \in \partial(G_{4,3})$。不失一般性，假设对于任意的 $1 \le i \le 3$，$p_i \ge p_{i+1}$ 成立。则 $p_4 \le \frac{1}{4}$，$p_3 \le \frac{1}{3}$，$p_1 \ge \frac{1}{4}$。

我们构造单位四维超立方体中的四个柱体。令这四维分别为 X_1, X_2, X_3, X_4。具体地，按如下方式定义柱体：

A_3：$X_4 > \frac{1}{2}, X_1 \le 2p_3$。

A_4：$X_4 \le \frac{1}{2}, X_2 \le 2p_4$。

A_1'：$(X_4 \le \frac{1}{2}, X_2 > 2p_4, X_1 \le 2p_3)$ 或 $(X_4 > \frac{1}{2}, X_2 \le 2p_4, X_1 > 2p_3)$。

容易验证 $\mu(A_1') = p_3 + p_4 - 4p_3p_4$。而且，如果 $p_3 > \frac{1}{4}$，我们有 $p_3 + p_4 - 4p_3p_4 \le p_3 + p_4 - p_4 = p_3 \le p_1$。如果 $p_3 \le \frac{1}{4}$ 时，我们有 $p_3 + p_4 - 4p_3p_4 = p_3 + (1-4p_3)p_4 \le p_3 + (1-4p_3)\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \le p_1$。因此，$\mu(A_1') \le p_1$ 始终成立。

在区域 $X_1 > 2p_3, X_2 > 2p_4$ 中任意选定一个集合 $S \subset \mathbb{I}^{\{1,2\}}$ 使得 $\mu(S) = p_1 + 4p_3p_4 - p_3 - p_4$。令 S' 为以 S 为基的柱体。

令 $A_1 = A_1' \cup S'$ 且 $A_2 = \overline{A_1 \cup A_3 \cup A_4}$。容易验证对于任意的 $1 \le i \le 4$，$\mu(A_i) = p_i$ 成立。且可以恰当选定 A_i 的基 B_i 使得 $\dim(B_1) = \{1,2,4\}$，$\dim(B_2) = \{1,2,3\}$，$\dim(B_3) = \{1,3,4\}$，$\dim(B_4) = \{2,3,4\}$。 □

由定理3.36和推论3.29，我们有如下结论。

推论 3.37. 对于任意的 $n \ge 4$，$G_{n,n-1}$ 的变量版本与抽象版本没有差异。

事实上，只要 n 相对于 m 足够大，推论3.37能够被推广到 $G_{n,n-m}$，其中 m 为任意常数。如定理3.38所述。

定义 3.12. 给定正整数 $m < n$，令 $T_{n,m} = \sum_{t \ge m} \binom{n}{t}$。则每一个 $k \in [T_{n,m}]$ 自然地代表了 $[n]$ 中一个大小为 m 的子集。令二部图 $G_{n,m}^{\ge} = ([T_{n,m}], [n], E_{n,m}^{\ge})$，其中 $(i, j) \in E_{n,m}^{\ge}$ 当且仅当 j 在 i 所代表的集合之中。

我们通过构造来证明定理3.38。给定一个 $G_{n,n-m}$ 的变量边界向量 $\mathbf{p}$，我们找到一部分维度，将由这些维度张成的单位超立方体 $\mathcal{C}$ 划分为 $\binom{n}{m}$ 个部分，并用其中的每一个部分为基，构造一个 $\mathbb{I}^n$ 中的柱体。本质上，这是在把所有的柱体投影到低维的超立方体之中。为了达到此目的，我们首先证明，当 n 足够大时，一定存在这一些维度，使得至少与这些维度中的某一维独立的柱体测度很小。然后，引理3.18保证了可以恰当选择这些柱体的基，使得他们的基是互斥的。最后，所有其他的柱体可以通过划分 $\mathcal{C}$ 中还没有被覆盖的部分得到。综上所述，我们得到了一个测度为 $\mathbf{p}$ 的互斥的柱体集。

定理 3.38. *对于任意的常数 m，当 n 足够大时，$G_{n,n-m}$ 的变量版本与抽象版本没有差异。*

证明. 我们只考虑 $m=2$ 的情况，因为 $m=2$ 时的证明方法可以自然地推广到其他的 m。

对 $G^{\geq}_{10,8}$ 应用引理3.18，我们有存在一个足够小的 $\epsilon>0$，使得当概率向量 $\mathbf{q}$ 中的所有元素都不超过 ϵ 时，存在一个同 $G^{\geq}_{10,8}$ 一致的互斥的柱体集满足 $\mu(\mathcal{B})=q$。令 $K=\frac{2}{\epsilon}$，$n=10K$，$N=\binom{n}{2}$。任意选定一个向量 $\mathbf{p}\in(0,1)^N$ 满足 $\sum_{i\in[N]}p_i=1$。令 f 为某一个将 $[n]$ 上的无序对映射到 $[N]$ 上的双射。

任意将集合 $[n]$ 划分成互斥的 K 组，使得每组包含 10 个元素。

任意选定其中的一组 T。对于 T 的任何一个包含 9 个元素的子集 S，设 $\{i\}=T\setminus S$，令 $q_S=\sum_{j\notin T}p_{f(i,j)}$。对于 T 的任何一个包含 8 个元素的子集 S，设 $\{i,j\}=T\setminus S$，令 $q_S=p_{f(i,j)}$。令 $\mathbf{q}^T$ 表示包含所有这些 q_S 的向量。令 v_T 表示 $\mathbf{q}^T$ 的 l_1 范数。

我们断言，存在一个 T 满足 $\mathbf{q}^T$ 的所有元素都不超过 ϵ。否则，对于所有的 T，$v_T>\epsilon$，则 $\sum_T v_T\geq K\epsilon>2$。然而，$\sum_T v_T\leq 2\sum_{1\leq i\leq N}p_i=2$。因此，此断言成立。

选定一个这样的 T。由我们选取 ϵ 的方式有，在单位超立方体 $\mathbb{I}^T$ 中存在一个同 $G^{\geq}_{10,8}$ 一致的互斥的柱体集满足 $\mu(\mathcal{B})=q^T$。对于 T 的任何一个包含 8 个或者 9 个元素的子集，令 B_S 表示 $\mathcal{B}$ 中与 S 对应的柱体。

对于 T 的某个包含 8 个元素的子集 S，如果 $S=T\setminus\{i,j\}$，我们用 $B_{f(i,j)}$ 来表示 B_S。

对于 T 的某个包含 9 个元素的子集 S，设 $\{i\}=T\setminus S$，将柱体 B_S 划分成 $10(K-1)$ 个互斥的柱体 $\{B_{f(i,j)}:j\notin T\}$，使得这些柱体仅依赖于 $\{X_k:k\in S\}$。

将 $\mathbb{I}^T \setminus (\cup_{B\in\mathcal{B}} B)$ 划分成 $\binom{n-10}{2}$ 个互斥的集合，$\{B_{f(i,j)} : i \neq j, i, j \notin T\}$，使得这些 $B_{f(i,j)}$ 满足 $\mu\left(B_{f(i,j)}\right) = p_{f(i,j)}$。

对于上述的每一个 $B_{f(i,j)}$，定义一个柱体 $A_{f(i,j)} = B_{f(i,j)} \times \mathbb{I}^{[n]\setminus T}$。令 $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_N\}$。容易验证 $\mathcal{A}$ 相对于 $G_{n,n-m}$ 是互斥的，$\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$，且 $\mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}} A) = 1$。

因此，$G_{n,n-2}$ 没有差异。 □

尽管有了很多正面的证据，问题 Q 的答案其实是否定的！如下的二部图即是一个不包含圈二部图但依然有差异的例子。考虑二部图 $G^* = ([5], [5], E)$，其中 $E = (\{1\}\times\{1,4,5\}) \cup (\{2\}\times\{2,4,5\}) \cup (\{3\}\times\{3,4,5\}) \cup (\{4\}\times\{1,2,3,4\}) \cup (\{5\}\times\{1,2,3,5\})$。

定理 3.39. *G^* 的变量版本与抽象版本有差异。*

证明. G^* 的基图 $G_D(G^*)$ 是一个完全图，因此，$\partial(G^*) = \{\mathbf{p} \in (0,1)^5 : p_1 + ... + p_5 = 1\}$。任意选定 $\mathbf{p} \in \partial(G^*)$ 满足 $p_4 = p_5 = \rho$，其中 ρ 是常数。

假设 $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_5\}$ 是 $\mathbb{I}^5$ 中相对于 G^* 互斥的一个柱体集，且满足 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$。令 $\mathbb{I}^5$ 的五个维度对应的变量分别为 $X_1, X_2, ..., X_5$。因为 $\mathcal{A}$ 是互斥的且 $\mathbf{p} \in \partial(G^*)$，由引理3.22我们有 $\mathbb{P}(\cup_{A\in\mathcal{A}} A) = 1$。由定理3.6，我们可以进一步假设 $\mathcal{A}$ 在每一维是 d-离散的，其中 d 是一个正整数。也就是说，对于任意的 $l \in R(G^*)$，单位区间 $\mathbb{I}^{\{l\}}$ 被划分为了 d 个互斥的子区间 $\Delta_1^{\{l\}}, \cdots, \Delta_d^{\{l\}}$。对于任意的 $i, j \in [d]$ 和集合 $A \subseteq \mathbb{I}^5$，令 $\pi_{i,j}^A$ 表示集合 $A \cap \left(\Delta_i^{\{4\}} \times \Delta_j^{\{5\}} \times \mathbb{I}^3\right)$；当 A 属于集合 $\mathcal{A}$ 上的 σ-代数时，一定存在着一个 $\mathbb{I}^3$ 的子集，$\tau_{i,j}^A$，使得 $\pi_{i,j}^A = \left(\Delta_i^{\{4\}} \times \Delta_j^{\{5\}} \times \tau_{i,j}^A\right)$。对于任意的集合 $B \subseteq \mathbb{I}^3$，如果 $\mu(B) = 0$，我们称 B 属于 e-类；如果 $\mu(B) = 1$，我们称 B 属于 f-类；对于任意的 $i \in [3]$，如果 $B = B^{\{i\}} \times \mathbb{I}^{[3]\setminus\{i\}}$ 对某个 $B^{\{i\}} \subset \mathbb{I}^{\{i\}}$ 成立，其中 $0 < \mu(B^{\{i\}}) < 1$，我们称 B 属于 i-类。令 T 表示这五类的集合。为了简化符号，令 $A_{4,5}$ 表示 $A_4 \cup A_5$。

对于任意的 $i, j \in [d]$，我们有如下这个性质。

性质 1： 对于任意的 $k \in [3]$，$\tau_{i,j}^{A_k}$ 属于 e-类，f-类或 k-类。

性质 2： 至多存在一个 $k \in [3]$ 使得 $\tau_{i,j}^{A_k}$ 不属于 e-类。这是因为 $\mathcal{A}$ 是互斥的，且对于任意的 $k \neq k' \in [3]$，如果 $\tau_{i,j}^{A_k}$ 和 $\tau_{i,j}^{A_{k'}}$ 都不属于 e-类，则 $\mu(\tau_{i,j}^{A_k} \cap \tau_{i,j}^{A_{k'}}) \neq 0$。

性质 3： $\tau_{i,j}^{A_{4,5}}$ 一定属于 T 中的某一类。这是因为性质 2，$\tau_{i,j}^{A_{4,5}} \cup_{k\in[3]} \tau_{i,j}^{A_k} = \mathbb{I}^3$，以及 $\mathcal{A}$ 是互斥的。

性质 4： 给定 $k \in [3]$，如果 $\tau_{i,j}^{A_{4,5}}$ 属于 k-类，则 $\tau_{i,j}^{A_k}$ 也属于 k-类。

接下来，我们对 $\tau_{i,j}^{A_{4,5}}$ 的不同可能性分类讨论。

情况 1： 存在 $i_0 \in [d]$ 使得对于任意的 $j \in [d]$，$\tau_{i_0,j}^{A_{4,5}}$ 属于 e-类。因为 $\tau_{i_0,j}^{A_{4,5}} = \tau_{i_0,j}^{A_4} \cup \tau_{i_0,j}^{A_5}$，我们有对于任意的 $j \in [d]$，$\mu(\tau_{i_0,j}^{A_5}) = 0$。又因为 A_5 与 X_4 独立，我们有对于任意的 $i, j \in [d]$，$\mu(\tau_{i,j}^{A_5}) = 0$。因此，$\mu(A_5) = 0$，这与 $\mathbf{p} \in (0,1)^5$ 相矛盾。对称的，假设存在 $j_0 \in [d]$ 使得对于任意的 $i \in [d]$，$\tau_{i,j_0}^{A_{4,5}}$ 属于 e-类，我们也可以导出矛盾。

情况 2： 存在 $i_0, i_1, j_0, j_1 \in [d]$ 使得 $\tau_{i_0,j_0}^{A_{4,5}}$ 属于 e-类且 $\tau_{i_0,j_1}^{A_{4,5}}$ 与 $\tau_{i_1,j_0}^{A_{4,5}}$ 均不属于 e-类。不失一般性，我们假设 $i_0 = 1$，$j_0 = 1$，$\tau_{1,j}^{A_{4,5}}$ 属于 e-类当且仅当 $1 \le j < j_1$，且 $\tau_{i,1}^{A_{4,5}}$ 属于 e-类当且仅当 $1 \le i < i_1$。

因为 A_4 同 X_5 独立且 A_5 同 X_4 独立，我们有对于任意的 $i, i', j, j' \in [d]$，$\tau_{i,j}^{A_4} = \tau_{i,j'}^{A_4}$ 且 $\tau_{i,j}^{A_5} = \tau_{i',j}^{A_5}$。因此，对于任意的 $i, j \in [d]$，我们有 $\tau_{i,j}^{A_{4,5}} = \tau_{i,j}^{A_4} \cup \tau_{i,j}^{A_5} = \tau_{i,1}^{A_4} \cup \tau_{1,j}^{A_5}$。因为 A_4 和 A_5 互斥，我们有 $\mu(\tau_{i,1}^{A_4} \cap \tau_{1,j}^{A_5}) = 0$。又因为，对于任意的 $i \in [d]$，$\tau_{i,1}^{A_{4,5}} = \tau_{i,1}^{A_4} \cup \tau_{i,1}^{A_5} = \tau_{i,1}^{A_4} \cup \tau_{1,1}^{A_5}$，则 $\tau_{i,1}^{A_{4,5}}$ 和 $\tau_{i,1}^{A_4}$ 的类型相同且 $\mu(\tau_{i,1}^{A_{4,5}}) = \mu(\tau_{i,1}^{A_4})$。对称地，对于任意的 $j \in [d]$，$\tau_{1,j}^{A_{4,5}}$ 和 $\tau_{1,j}^{A_5}$ 的类型相同且 $\mu(\tau_{1,j}^{A_{4,5}}) = \mu(\tau_{1,j}^{A_5})$。

考虑任意的 $i \ge i_1$ 和 $j \ge j_1$。因为 $\mu(\tau_{i,1}^{A_4}) + \mu(\tau_{1,j}^{A_5}) = \mu(\tau_{i,j}^{A_{4,5}}) \le 1$，由假设 $\mu(\tau_{i,1}^{A_{4,5}}) > 0$ 和 $\mu(\tau_{1,j}^{A_{4,5}}) > 0$，我们有 $\tau_{i,1}^{A_{4,5}}$ 和 $\tau_{1,j}^{A_{4,5}}$ 既不属于 e-类，也不属于 f-类。假设 $\tau_{i,1}^{A_{4,5}}$ 属于 1-类且 $\tau_{1,j}^{A_{4,5}}$ 属于 2-类。则 $\tau_{i,1}^{A_4}$ 属于 1-类且 $\tau_{1,j}^{A_5}$ 属于 2-类，这同 $\mu(\tau_{i,1}^{A_4} \cap \tau_{1,j}^{A_5}) = 0$ 相矛盾。

因此，不失一般性，假设对于任意的 $i \ge i_1$ 和 $j \ge j_1$，$\tau_{i,1}^{A_4}$ 和 $\tau_{1,j}^{A_5}$ 都属于 1-类。因为 $\tau_{i,j}^{A_{4,5}} = \tau_{i,1}^{A_4} \cup \tau_{1,j}^{A_5}$，我们有当 $i \ge i_1$ 或者 $j \ge j_1$ 时，$\tau_{i,j}^{A_{4,5}}$ 要么属于 1-类要么属于 f-类。由性质 2 和性质 4，当 $i \ge i_1$ 或者 $j \ge j_1$ 时，$\tau_{i,j}^{A_2}$ 和 $\tau_{i,j}^{A_3}$ 都属于 e-类。因此，$\mu(A_2) + \mu(A_3) \le (1 - \mu(\Delta^{\{4\}}))(1 - \mu(\Delta^{\{5\}}))$，其中 $\Delta^{\{4\}} = \cup_{i_1 \le i \le d} \Delta_i^{\{4\}}$ 且 $\Delta^{\{5\}} = \cup_{j_1 \le j \le d} \Delta_j^{\{5\}}$。我们首先证明断言 1。

断言 1：$(1 - \mu(\Delta^{\{4\}}))(1 - \mu(\Delta^{\{5\}})) \le (1 - 2\rho)^2$。

对断言 1 的证明：对于任意的 $i, j \in [d]$，令 $r_i = \mu(A_4 \cap \Delta_i^{\{4\}} \times \mathbb{I}^{[5] \setminus \{4\}})$，$r_{i,j} = \mu(\pi_{i,j}^{A_4})$，$s_j = \mu(A_5 \cap \Delta_j^{\{5\}} \times \mathbb{I}^4)$，$s_{i,j} = \mu(\pi_{i,j}^{A_5})$。我们有 $\rho = \sum_{i \ge i_1} r_i = \sum_{i \ge i_1, j \in [d]} r_{i,j} = \sum_{j \ge j_1} s_j = \sum_{i \in [d], j \ge j_1} s_{i,j}$。

因为 A_4 同 X_5 独立，我们有 $r_{i,j} = r_i \mu(\Delta_j^{\{5\}})$，因此 $\sum_{j_1 \le j \le d} r_{i,j} = r_i \mu(\Delta^{\{5\}})$ 且 $\sum_{i_1 \le i \le d, j_1 \le j \le d} r_{i,j} = \rho\mu(\Delta^{\{5\}})$。类似的，我们有 $\sum_{i_1 \le i \le d, j_1 \le j \le d} s_{i,j} = \rho\mu(\Delta^{\{4\}})$。

另一方面，因为 A_4 和 A_5 互斥，我们有对于任意的 $i_1 \le i \le d, j_1 \le$

$j \le d$，$r_{i,j} + s_{i,j} \le \mu(\Delta_i^{\{4\}})\mu(\Delta_j^{\{5\}})$，因此有 $\sum_{i_1 \le i \le d, j_1 \le j \le d}(r_{i,j} + s_{i,j}) \le \mu(\Delta^{\{4\}})\mu(\Delta^{\{5\}})$。

因此，$\mu(\Delta^{\{4\}})\mu(\Delta^{\{5\}}) \ge \rho(\mu(\Delta^{\{4\}}) + \mu(\Delta^{\{5\}})) \ge 2\rho\sqrt{\mu(\Delta^{\{4\}})\mu(\Delta^{\{5\}})}$，则 $\sqrt{\mu(\Delta^{\{4\}})\mu(\Delta^{\{5\}})} \ge 2\rho$。我们进一步有

$$\begin{aligned}
(1-\mu(\Delta^{\{4\}}))(1-\mu(\Delta^{\{5\}})) &= 1-(\mu(\Delta^{\{4\}})+\mu(\Delta^{\{5\}}))+\mu(\Delta^{\{4\}})\mu(\Delta^{\{5\}}) \\
&\le 1-2\sqrt{\mu(\Delta^{\{4\}})\mu(\Delta^{\{5\}})}+\mu(\Delta^{\{4\}})\mu(\Delta^{\{5\}}) \\
&= (1-\sqrt{\mu(\Delta^{\{4\}})\mu(\Delta^{\{5\}})})^2 \le (1-2\rho)^2.
\end{aligned}$$

断言 1 证毕。

由断言 1，容易验证 $\mu(A_2)+\mu(A_3) \le (1-2\rho)^2$。因为 $\mathcal{A}$ 是互斥的，我们有 $\mu(A_1) = 1-\sum_{2\le k\le 5}\mu(A_k) \ge 1-(1-2\rho)^2-2\rho = 2\rho-4\rho^2$。

情况 3：存在 $k \in [3]$ 使得对于任意的 $i,j \in [d]$，$\tau_{i,j}^{A_{4,5}}$ 既不属于 e-类，也不属于 k-类。假设 $k=1$ 满足上述条件。由性质 1，我们有 $\tau_{i,j}^{A_1}$ 只能属于 e-类，f-类，或者 1-类。由 $\tau_{i,j}^{A_{4,5}}$ 既不属于 e-类，也不属于 1-类，结合性质 4，我们有 $\tau_{i,j}^{A_1}$ 只能属于 e-类。因此，$\mu(A_1)=0$，由此导出矛盾。

情况 4：对于任意的 $i,j \in [d]$，$\tau_{i,j}^{A_{4,5}}$ 不属于 e-类，且对于任意的 $k \in [3]$，存在 $i,j \in [d]$ 使得 $\tau_{i,j}^{A_{4,5}}$ 属于 k-类。

断言 2：存在 $i_0,j_0,j_1 \in [d]$ 和 $k_1 \ne k_2 \in [3]$ 使得 $\tau_{i_0,j_0}^{A_{4,5}}$ 属于 k_1-类且 $\tau_{i_0,j_1}^{A_{4,5}}$ 属于 k_2-类，或者存在 $i_0,i_1,j_0 \in [d]$ 和 $k_1 \ne k_2 \in [3]$ 使得 $\tau_{i_0,j_0}^{A_{4,5}}$ 属于 k_1-类且 $\tau_{i_1,j_0}^{A_{4,5}}$ 属于 k_2-类。

对于断言 2 的证明：为了导出矛盾，假设断言 2 在情况 4 下不成立。则一定存在 $i_0,i_1,j_0,j_1 \in [d]$ 和 $k_1 \ne k_2 \in [3]$ 使得 $\tau_{i_0,j_0}^{A_{4,5}}$ 属于 k_1-类，$\tau_{i_1,j_1}^{A_{4,5}}$ 属于 k_2-类，且 $\tau_{i_1,j_0}^{A_{4,5}}$ 和 $\tau_{i_0,j_1}^{A_{4,5}}$ 属于 k_3-类或者 f-类。不失一般性，假设 $\tau_{i_1,j_0}^{A_{4,5}}$ 和 $\tau_{i_0,j_1}^{A_{4,5}}$ 属于 f-类。因为对于任意的 $i,i',j,j' \in [d]$，

$$\begin{aligned}
\tau_{i,j}^{A_{4,5}} \cup \tau_{i',j'}^{A_{4,5}} &= \tau_{i,j}^{A_4} \cup \tau_{i,j}^{A_5} \cup \tau_{i',j'}^{A_4} \cup \tau_{i',j'}^{A_5} = \tau_{i,j'}^{A_4} \cup \tau_{i',j}^{A_5} \cup \tau_{i',j}^{A_4} \cup \tau_{i,j'}^{A_5} \\
&= \tau_{i',j}^{A_5} \cup \tau_{i',j}^{A_4} \cup \tau_{i,j'}^{A_4} \cup \tau_{i,j'}^{A_5} = \tau_{i',j}^{A_{4,5}} \cup \tau_{i,j'}^{A_{4,5}}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

因此 $\tau_{i_0,j_0}^{A_{4,5}} \cup \tau_{i_1,j_1}^{A_{4,5}} = \tau_{i_1,j_0}^{A_{4,5}} \cup \tau_{i_0,j_1}^{A_{4,5}}$。即有，一个 f-类集合等于一个 k_1-类集合和一个 k_2-类集合的并，这显然是不可能的。$\tau_{i_1,j_0}^{A_{4,5}}$ 和 $\tau_{i_0,j_1}^{A_{4,5}}$ 属于其它类的情况也可以类似证明。**断言 2 证毕**。

由断言 2，不失一般性，假设 $\tau_{1,1}^{A_{4,5}}$ 属于 1-类且 $\tau_{1,2}^{A_{4,5}}$ 属于 2-类。

断言 3：对于任意的 $i,j \in [d]$，$\tau_{i,j}^{A_{4,5}}$ 和 $\tau_{1,j}^{A_{4,5}}$ 的类型相同。

对断言 3 的证明：我们首先证明，对于任意的 $i,j \in [d]$，如果 $\tau_{1,j}^{A_{4,5}}$ 不属于 3-类，则 $\tau_{i,j}^{A_{4,5}}$ 不属于 3-类。为了导出矛盾，假设存在 $i,j \in [d]$ 使得 $\tau_{i,j}^{A_{4,5}}$ 属于 3-类且 $\tau_{1,j}^{A_{4,5}}$ 不属于 3-类。如果 $\tau_{1,j}^{A_{4,5}}$ 属于 1-类，由 (3.7) 有，$\tau_{1,j}^{A_{4,5}} \subset \tau_{1,j}^{A_{4,5}} \cup \tau_{i,2}^{A_{4,5}} = \tau_{1,2}^{A_{4,5}} \cup \tau_{i,j}^{A_{4,5}}$，这意味着一个 1-类集合被包含在一个 2-类集合和 3-类集合的并之中，这是不可能的。类似的，如果 $\tau_{1,j}^{A_{4,5}}$ 属于 2-类或者 f-类，也可以导出矛盾。因此，在情况 4，一定存在 $j \in [d]$ 使得 $\tau_{1,j}^{A_{4,5}}$ 属于 3-类。不失一般性，假设 $\tau_{1,3}^{A_{4,5}}$ 属于 3-类。

为了导出矛盾，假设存在 $i,j \in [d]$ 使得 $\tau_{i,j}^{A_{4,5}}$ 和 $\tau_{1,j}^{A_{4,5}}$ 的类型不同。如果 $\tau_{1,j}^{A_{4,5}}$ 属于 1-类且 $\tau_{i,j}^{A_{4,5}}$ 属于 2-类，由 $\tau_{1,j}^{A_{4,5}} \subset \tau_{1,j}^{A_{4,5}} \cup \tau_{i,3}^{A_{4,5}} = \tau_{1,3}^{A_{4,5}} \cup \tau_{i,j}^{A_{4,5}}$，可导出矛盾。类似的，只要 $\tau_{i,j}^{A_{4,5}}$ 和 $\tau_{1,j}^{A_{4,5}}$ 的类型不同，均可导出矛盾。**断言 3 证毕**。

我们进一步证明，对任意的 $i,j \in [d]$，$\tau_{i,j}^{A_{4,5}} = \tau_{1,j}^{A_{4,5}}$。证明还是基于 (3.7)。以 $j = 1$ 为例。对于任意的 $i \neq 1$，我们有 $\tau_{1,1}^{A_{4,5}} \cup \tau_{i,2}^{A_{4,5}} = \tau_{1,2}^{A_{4,5}} \cup \tau_{i,1}^{A_{4,5}}$。因为 $\tau_{1,1}^{A_{4,5}}$ 和 $\tau_{i,1}^{A_{4,5}}$ 属于 1-类且 $\tau_{i,2}^{A_{4,5}}$ 和 $\tau_{1,2}^{A_{4,5}}$ 属于 2-类，则等式 (3.7) 成立仅当 $\tau_{i,1}^{A_{4,5}} = \tau_{1,1}^{A_{4,5}}$ 且 $\tau_{i,2}^{A_{4,5}} = \tau_{1,2}^{A_{4,5}}$。

因此，$A_4 \cup A_5$ 同 X_4 独立。又因为 A_5 与 X_4 独立，我们有 A_4 与 X_4 独立。

进一步的，如果 $j \in [d]$ 满足 $\tau_{1,j}^{A_{4,5}}$ 属于 1-类，则对于任意的 $i \in [d]$，$\tau_{i,j}^{A_{4,5}}$ 也属于 1-类，因此 $\tau_{i,j}^{A_1} = \mathbb{I}^3 \setminus \tau_{i,j}^{A_{4,5}}$。因为 $\tau_{i,j}^{A_{4,5}}$ 同 i 独立，则 $\tau_{i,j}^{A_1}$ 也同 i 独立。因此，A_1 同 X_4 独立。类似的，A_2 和 A_3 都同 X_4 独立。

综上所述，在情况 4，所有的柱体都同 X_4 独立。

以上的分类讨论说明只有情况 2 和情况 4 可能出现。

考虑概率向量 $\mathbf{p} = (\frac{2}{9} - \frac{2}{3}\epsilon, \frac{2}{9} - \frac{2}{3}\epsilon, \frac{2}{9} - \frac{2}{3}\epsilon, \frac{1}{6} + \epsilon, \frac{1}{6} + \epsilon) \in \partial(G^*)$，其中 $\epsilon > 0$ 是一个待定的常数。任意选定一个互斥的柱体集 $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_5\} \sim G^*$ 满足 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$。因为当 ϵ 足够小时，$p_1 < 2p_4 - 4p_4^2$，此时只有情况 4 可能出现。假设所有的事件都同 X_4 独立。选定 $B_1 \subset \mathbb{I}^{\{1,5\}}, B_2 \subset \mathbb{I}^{\{2,5\}}, B_3 \subset \mathbb{I}^{\{3,5\}}, B_4 \subset \mathbb{I}^{\{1,2,3\}}, B_5 \subset \mathbb{I}^{\{1,2,3,5\}}$ 作为 $A_1, ..., A_5$ 的基。对于任意的 $i \in [3]$，选择最小的集合 $\Delta_i \subseteq \mathbb{I}^{\{5\}}$ 和 $\Lambda_i \subseteq \mathbb{I}^{\{i\}}$ 使得 $\mu(B_i \setminus (\Delta_i \times \Lambda_i)) = 0$ 成立。因为柱体集 $\mathcal{A}$ 是互斥的，我们有对于任意的 $i,j \in [3]$，$\mu(\Delta_i \cap \Delta_j) = 0$。对任意的 $i \in \{1,2,3\}$，令 $\delta_i = \mu(\Delta_i), \lambda_i = \mu(\Lambda_i)$。则有如下的不等式同时成立：

- $\delta_i \lambda_i \geq \frac{2}{9} - \frac{2}{3}\epsilon, i \in \{1,2,3\}$
- $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 1$

表 3.1 变量版本与抽象版本有差异和无差异的二部图的例子

有差异	无差异
G^* $G_{7c,5c}$ 的稀疏二部图 圈二部图	$G_{n,n-c}$，其中 n 足够大 $G_{n,n-1}$，其中 $n \geq 4$ 树

- $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3) \geq \frac{1}{6} + \epsilon$

其中最后一个不等式是因为 B_4 一定在 $(\mathbb{I}^{\{1\}} \setminus \Lambda_1) \times (\mathbb{I}^{\{2\}} \setminus \Lambda_2) \times (\mathbb{I}^{\{3\}} \setminus \Lambda_3)$ 的变量内部。然而，容易验证，当 ϵ 很小时，上述这些不等式不可能同时成立。

因此，不存在一个相对于 G^* 互斥的柱体集 $\mathcal{A}$ 满足 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$。因为 $\mathbf{p} \in \partial(G^*) \subset \mathcal{V}\partial(G^*) \cup \mathcal{VI}(G^*)$，由定理3.25有 G^* 有差异。 □

利用删事件操作和复制变量的逆操作，不难从 $G_{7,5}$ 得到 G^*。因为 G^* 有差异，我们有 $G_{7,5}$ 也有差异。由推论3.31，我们有如下推论。

推论 3.40. *对于任意的整数 $c \geq 1$，所有 $G_{7c,5c}$ 的稀疏二部图变量版本与抽象版本有差异。*

表3.1汇总了本节中得到的有差异和无差异的二部图的例子。

如果一个图中不存在诱导子图是长度大于 3 的圈，该图被称为*弦图*。容易验证，如果一个二部图的基图不是弦图，即其基图中存在一个诱导子图是长度大于 3 的圈，则该二部图中一定包含一个圈二部图。因此，由定理3.32和推论3.34，我们有如下结论。

推论 3.41. *给定一个二部图，如果该二部图是树，则其变量版本与抽象版本无差异。否则，如果其基图不是弦图，则其变量版本与抽象版本有差异。*

3.5.2 对有差异和强有差异的依赖图的刻画

从依赖图出发是另一个研究差异是否存在的有趣的视角：如果存在一个有差异的二部图其基图是 G_D，我们称依赖图 G_D 是有差异的，否则我们称这个依赖图没有差异。Kolipaka 和 Szegedy (2011) 考虑了另外一个相关的概念：如果任何一个基图是 G_D 的二部图都是有差异的，我们称 G_D 是强有差异的，否则我们称它不是强有差异的。

一个简单的观察是如果 $G_D(G_B)$ 是无差异的，则二部图 G_B 无差异；否则，如果 $G_D(G_B)$ 是强有差异的，则 G_B 有差异。利用之前提到的一些结果，我们可以完全刻画哪些依赖图是有差异的，哪些依赖图是强有差异的，从而解决了Kolipaka和 Szegedy (2011) 提出的开放问题。

定理 3.42. 一个依赖图是无差异的当且仅当它是一棵树。

证明. 由定理3.32和3.33，我们有本定理成立。 □

为了刻画强有差异，我们需要如下定义，其中 $Cliq(G_D)$ 是依赖图 G_D 中极大团的集合。

定义 3.13. 给定一个依赖图 $G_D = ([m], E)$，令 $Cliq(G_D) = \{C_1, ..., C_n\}$ 为 G_D 中极大团的集合。G_D 对应的标准二部图，$G_B(G_D)$，是二部图 $([m], [n], E')$ ，其中 $E' = \{(i, j) \in [m] \times [n] : i \in C_j\}$。

直观地说，$G_B(G_D)$ 建模了如下由变量生成的事件系统，该系统中 G_D 的每个极大团都有一个特有的随机变量，一个事件依赖于这个变量当且仅当这个事件在相应的极大团之中。

我们断言，在所有基图是 G_D 的二部图之中，$G_B(G_D)$ 的变量内部是最大的。这意味着 G_D 是强有差异的当且仅当 $G_B(G_D)$ 是有差异的。

引理 3.43. 给定依赖图 G_D，对于任意满足 $G_D(G_B) = G_D$ 的二部图 G_B 有，$\mathcal{VI}(G_B) \supseteq \mathcal{VI}(G_B(G_D))$。

证明. 我们分两步来证明这个引理。

第一步：对于任意的二部图 $G_B = ([m], [n], E)$，设 S 是 $G_D(G_B)$ 中的一个团，令二部图 $G'_B = ([m], [n+1], E')$ 满足对于任意的 $j \in R(G'_B)$，如果 $j = n+1$，则 $\mathcal{N}_{G'_B}(j) = S$，否则 $\mathcal{N}_{G'_B}(j) = \mathcal{N}_{G_B}(j)$。任意选定 $\mathbf{p} \in \mathcal{VE}(G_B)$。存在一个 $\mathbb{I}^n$ 中的柱体集 $\mathcal{A}$ 满足 $\mathcal{A} \sim G_B$，$\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$，且 $\mu(\cup_{A \in \mathcal{A}} A) = 1$。令 $\mathcal{A}' = \{A \times \mathbb{I}^{\{n+1\}} : A \in \mathcal{A}\}$。则 $\mathcal{A}'$ 是 $\mathbb{I}^{n+1}$ 中的一个柱体集，$\mathcal{A}' \sim G'_B$，$\mu(\mathcal{A}') = \mathbf{p}$，且 $\mu(\cup_{A \in \mathcal{A}'} A) = 1$。因此，我们有 $\mathcal{VE}(G'_B) \subseteq \mathcal{VE}(G_B)$。

对于任意满足 $G_D(G_B) = G_D$ 的二部图 G_B，对于 $G_D(G_B)$ 中的每一个极大团，我们如之前所述那样修改 G_B。令 $\overline{G_B}$ 为得到的二部图。不难验证，$\mathcal{VI}(G_B) \supseteq \mathcal{VI}(\overline{G_B})$。

第二步：$\overline{G_B}$ 同 $G_B(G_D)$ 的唯一区别是可能存在 $j \neq k \in R(\overline{G_B})$ 使得 $\mathcal{N}_{\overline{G_B}}(j) \subseteq \mathcal{N}_{\overline{G_B}}(k)$。对 $\overline{G_B}$ 重复使用复制变量的逆操作，直到无法去掉冗余变量为止，最终得到的二部图即是 $G_B(G_D)$。因为在证明复制变量操作不影响二部图是否有差异时 (即定理3.26)，我们其实证明了复制变量操作不影响二部图的变量边界，因此该操作也不影响二部图的变量内部。这意味着 $\mathcal{VI}(\overline{G_B}) = \mathcal{VI}(G_B(G_D))$。

综上所述，我们有 $\mathcal{VI}(G_B) \supseteq \mathcal{VI}(G_B(G_D))$。 □

弦图一个很有趣的性质是存在一个顶点只出现在一个极大团中。现在我们来证明关于弦图的如下结论。

引理 3.44. 任何弦图都不是强有差异的。

证明. 令 $G_D = ([m], E)$ 是一个弦图。我们对 m 进行归纳。

归纳基础：$m = 1$。此时 G_D 显然不是强有差异的。

归纳假设：引理对 $m < M$ 成立。

归纳：考虑 $m = M$ 的情况。令 $G_B = G_B(G_D) = ([m], [n], E)$。不失一般性，假设图 G_D 中的顶点 m 只出现在一个极大团 $S = \{m-k+1, ..., m\}$ 之中。这意味着，$m \in L(G_B)$ 在 G_B 中只有一个邻居，设这个邻居为 n，则有 $\mathcal{N}_{G_B}(n) = S$。令 G_B' 为从 G_B 中删除顶点 $m \in L(G_B)$ 后得到的二部图，G_D' 为从 G_D 中删除顶点 m 之后得到的弦图。显然，如果 $S \setminus \{m\}$ 依然是 G_D' 的一个极大团，则 $G_B' = G_B(G_D')$；否则，$G_B(G_D')$ 可以通过对 G_B' 应用复制变量的逆操作得到。因此，我们总有 G_B' 无差异当且仅当 $G_B(G_D')$ 无差异。

任意选定 $\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$。令 $\mathbf{p}' = (p_1, ..., p_{m-k}, \frac{p_{m-k+1}}{1-p_m}, ..., \frac{p_{m-1}}{1-p_m})$。选定 $\lambda > 0$ 使得 $\lambda\mathbf{p}' \in \mathcal{V}\partial(G_B')$。对 G_D' 应用归纳假设，由定理3.25有，存在 $\mathbb{I}^m$ 中的柱体集 $\mathcal{A}' = A_1', ..., A_{m-1}'$ 满足 $\mathcal{A}'$ 相对于 G_B' 互斥，$\mu(\mathcal{A}') = \lambda\mathbf{p}'$，且 $\mu(\cup_{A' \in \mathcal{A}'} A') = 1$。对于任意的 $1 \leq i \leq m-k$，令 $A_i = A_i'$，对于任意的 $m-k < i < m$，令 $A_i = \{(x_1, ..., x_{n-1}, x_n(1-p_m)) : (x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in A_i'\}$，令 $A_m = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{I}^n : x_n \geq 1-p_m\}$。因为 $\mu(\cup_{A' \in \mathcal{A}'} A') = 1$ 且 $A_1', ..., A_{m-k}'$ 同 X_n 独立，我们有 $\mu((\mathbb{I}^{n-1} \times [0, 1-p_m]) \cap (\cup_{1 \leq i \leq m-1} A_i)) = 1-p_m$。因此，令 $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_m\}$，我们有 $\mu(\cup_{A \in \mathcal{A}} A) = 1$，$\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{q} \triangleq (\lambda p_1, ..., \lambda p_{m-1}, p_m)$，且 $\mathcal{A}$ 相对于 G_B 互斥。由推论3.21有，$\mathbf{q} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$。因此，由引理3.5，我们有 $\mathbf{q} = \mathbf{p}$。

综上所述，对于任意的 $\mathbf{p} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$，存在一个相对于 G_B 互斥的柱体集 $\mathcal{A}$ 满足 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$。由定理3.25有，$G_B$ 无差异。因此，G_D 不是强有差异的。 □

现在我们可以完全刻画什么样的依赖图是强有差异的。

定理 3.45. 一个图是强有差异的当且仅当它不是弦图。

证明. 任意选定图 G_D。

如果它不是弦图，则其一定有一个诱导子图是长度大于 3 的圈。由推论3.34，$G_B(G_D)$ 是有差异的，因此 G_D 是强有差异的。

另一方面，如果 G_D 是弦图，则由引理3.44有，它不是强有差异的。 □

定理3.32可以看作是定理3.45的推论。

3.6 难解性

在本节中，我们定义一些同刻画二部图的变量内部相关的计算问题，并证明这些问题是难解的。

定义 3.14 (MUP 问题)**.** 给定一个二部图 $G_B = ([m], [n], E)$ 和概率向量 $\mathbf{p} \in (0, 1]^m$，计算 $\Psi(G_B, \mathbf{p}) \triangleq \max_{\mathcal{A}\sim G_B, \mu(\mathcal{A})=\mathbf{p}} \mu\left(\cup_{A\in\mathcal{A}} A\right)$，其中 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{I}^n$ 中的柱体集，μ 是勒贝格测度。

定义 3.15 (INT 问题)**.** 给定一个二部图 G_B 和概率向量 $\mathbf{p} \in (0, 1)^m$，判定 $\mathbf{p} \in \mathcal{VI}(G_B)$ 是否成立。

定理 3.46. *MUP* 是 #P-难的。

证明. 我们只需证明，当 G_B 是 $(3, 2)$-正则二部图，$\mathbf{p} = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, ..., \frac{1}{8})$ 时，MUP 是 #P-难的。

任意选定一个 $(3, 2)$-正则二部图 $G_B = ([m], [n], E)$。我们将构造一个 $\mathbb{I}^n$ 中相对于 G_B 互斥的柱体集 $\mathcal{A}$ 满足 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$。

任意选定一个将 $[n]$ 中的每一个顶点映射到它的某个邻居的函数 $f : [n] \to [m]$。对于任意的 $i \in [m]$，按如下方式定义柱体 $A_i \subset \mathbb{I}^n$：对于 i 的每个邻居 j，如果 $f(j) = i$，则 $0 \le X_j \le 1/2$，否则 $1/2 < X_j \le 1$。令 $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_m\}$。

因为每个 $i \in [m]$ 在 G_B 中恰好有三个邻居且每个 $j \in [n]$ 恰好有两个邻居，我们有 $\mu(\mathcal{A}) = \mathbf{p}$ 且 $\mathcal{A}$ 相对于 G_B 是互斥的。因此，由引理3.22有，$\mu(\cup_{i\in[m]} A_i) = \Psi(G_B, \mathbf{p})$。

上述构造其实将 $\mathbb{I}^n$ 分成了 2^n 块，其中每块的测度为 2^{-n}。$\mathcal{A}$ 中的任何一个柱体都是由其中一些块组成。令 $\{B_{k_1,k_2,...,k_n}$ ：对于任意的 $j \in [n], k_j \in \{0, 1\}\}$ 表

示这 2^n 块，其中 $B_{k_1,k_2,\dots,k_n}$ 表示的块满足如果 $k_j=0$，则 $0 \le X_j \le 1/2$，如果 $k_j=1$，则 $1/2 < X_j \le 1$。给定 $k_1,k_2,\dots,k_n \in \{0,1\}$ 和 $i \in [m]$，我们有如下条件是等价的。

1. $B_{k_1,k_2,\dots,k_n} \subseteq A_i$。
2. 对于 i 在 G_B 中的每个邻居 j，$k_j=0$ 当且仅当 $f(j)=i$。

令 N 表示在 $\cup_{i\in[m]}A_i$ 之外的块数。则我们有 $\mu(\cup_{i\in[m]}A_i) = 1 - N/2^n$，因此，计算 $\Psi(G_B,\mathbf{p})$ 等价于计算 N。

另一方面，计算 N 同 3-SAT 问题相关。令 $\{y_1,\dots,y_n\}$ 是一个布尔变量的集合。对于任意的 $i\in[m]$，假设 j_1,j_2,j_3 是 i 在 G_B 中的邻居；定义一个 3-SAT 的子句 $\phi_i = z_{j_1} \vee z_{j_2} \vee z_{j_3}$，其中对于任意的 $k\in[3]$，如果 $f(j_k)=i$，则文字 $z_{j_k} \triangleq y_{j_k}$，否则 $z_{j_k} \triangleq \overline{y_{j_k}}$。则 $\phi \triangleq \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_m$ 的事件-变量图恰好是 G_B。因为每个变量本身和该变量的非恰好都只出现一次，我们有 ϕ 一个是 Holant([0, 1, 0]|[0, 1, 1, 1]) 或者 Rtw-Opp-#3SAT 实例。

考虑如下赋值，对于任意的 $j\in[n]$，令 $y_j = k_j$。容易验证 ϕ 被满足当且仅当 $B_{k_1,k_2,\dots,k_n}$ 落在 $\cup_{i\in[m]}A_i$ 之外。因此，N 是使得 ϕ 为真的赋值的数目。因此，由 (Cai 等, 2008, 定理 8.1) 有，即使 G_B 是 (3,2)-正则的，计算 N 依然是 #P-难的。 □

注. (Harvey 等, 2016, Section C) 证明了判定 $\mathbf{p} \in \mathcal{I}(G_B)$ 是否成立是 #P-难的。这里的证明受到了该证明的启发。

注. 上述证明中定义的 $\Psi(G_B,\mathbf{p})$ 是一个分母为 2^n 的真分数。这个观察将被用在下一个定理的证明中。

由定理3.46，可以证明如下结果。

定理 3.47. *INT* 是 #P-难的。

证明. 给定一个 (3,2)-正则二部图 G_B 和概率向量 $\mathbf{p} = (\frac{1}{8},\frac{1}{8},\dots,\frac{1}{8})$，假设 $\Psi(G_B,\mathbf{p}) = 1 - \frac{N}{2^n}$。

令 $r\in[0,1]$。构造二部图 $G'_B = ([m+1],[n],E')$ 和概率向量 $\mathbf{p}^{(r)}$，其中 $E' = E \cup \{(m+1,1),(m+1,2),\dots,(m+1,n)\}$ 且 $\mathbf{p}^{(r)} = (\frac{1}{8},\frac{1}{8},\dots,\frac{1}{8},r)$。

不难验证，$\mathbf{p}^{(r)} \in \mathcal{VI}(G'_B)$ 当且仅当 $1-\frac{N}{2^n}+r<1$。令 r_{max} 为最大的满足 $\mathbf{p}^{(r)} \in \mathcal{VI}(G'_B)$ 的 r。显然，$r_{max} = \frac{N-1}{2^n}$。

为了计算 r_{max}，从而算出 $\Psi(G_B,\mathbf{p})$，利用二分搜索，我们只需要求解 poly(n) 个 INT 的实例，即判定 $\mathbf{p}^{(r_i)} \in G'_B$ 是否成立，其中 r_i 是第 i 个实例的参数。因此，由定理3.46，我们有 INT 是 #P-难的。 □

第 4 章　量子版本局部引理

本章将给出量子版本局部引理的紧的条件。首先，我们给出将会用到的基本定义。

4.1　量子版本的定义和记号

令 $G_B = ([m], [n], E_B)$ 为一个给定的相互作用图，$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$ 为一个给定的相对维度向量。在本文中，我们只关心有限维的量子系统，也只考虑相对维度是有理数的情况。同时，不失一般性，我们假设相对维度一定是正数，即 $\mathbf{r} \in (0, 1]^m$。因为在归纳证明定理4.5的过程中会引入不连通的相互作用图，我们在本章中不假设二部图 G_B 是连通的。

设 V 是某个向量空间，$W_1, \ldots, W_k$ 是 V 的子空间，如果 $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ 且 $W_1, \ldots, W_k$ 线性独立，我们称 V 是 $W_1, \ldots, W_k$ 的直和，记为 $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$。

定义 4.1 (由 qudit 张成的希尔伯特空间)**.** 设某个量子系统由 n 个 qudit 构成。则这个量子系统的希尔伯特空间是一个复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶直积空间，$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$。对于任意的 $S \subseteq [m]$，令 $\mathcal{H}_S := \bigotimes_{i \in S} \mathcal{H}_i$ 为由 S 中的 qudit 张成的希尔伯特空间，比如 $\mathcal{H}_{\{1,2\}} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$。对于任意的 $j \in [n]$，令 $\dim(\mathcal{H}_j)$ 表示 $\mathcal{H}_j$ 的维数，令 $\dim(\mathcal{H}_1, \cdots, \mathcal{H}_n)$ 分别表示 $(\dim(\mathcal{H}_1), \dim(\mathcal{H}_2), \cdots, \dim(\mathcal{H}_n))$ 的维数。

对于某个 qudit，$\mathcal{H}_i$，设 $\{|l\rangle : l \in [d_i]\}$ 为 $\mathcal{H}_i$ 的标准计算基。如果作用在 $\mathcal{H}_i$ 上的任何一个哈密尔顿量 Π_j 都能被写成 $\sum_{l \in S_{ij}} |l\rangle\langle l| \otimes \Pi_{ijl}$ 的形式，其中 $S_{ij} \subseteq [d_i]$，Π_{ijl} 是子空间 $\mathcal{H}_{[n]\setminus\{i\}}$ 上的投影算符，我们称 $\mathcal{H}_i$ 相对于 $\Pi = \sum_j \Pi_j$ 是经典的，或者 $\mathcal{H}_i$ 相对于 $\Pi = \sum_j \Pi_j$ 是经典变量。在不引起歧义的情况下，我们将省略“相对于 $\Pi = \sum_j \Pi_j$”。

定义 4.2 (投影算符，子空间和相对维度)**.** 给定子空间 $V \subset \mathcal{H}$，令 Π_V 表示投影到 V 上的投影算符。Π_V 相对于 $\mathcal{H}$ 的相对维度定义为 $R_{\mathcal{H}}(\Pi_V) := \frac{\operatorname{tr}(\Pi_V)}{\dim(\mathcal{H})} = \frac{\dim(V)}{\dim(\mathcal{H})}$。在不引起歧义的情况下，我们将直接称 $R_{\mathcal{H}}(\Pi_V)$ 为 Π_V 的相对维度，并简记为 $R(\Pi_V)$。由上述定义有，$R(\Pi_V)$ 是一个有理数。

如果 $V_1, \cdots, V_m$ 没有张满整个空间 $\mathcal{H}_{[n]}$，我们称子空间的集合 $\mathcal{V} = \{V_1, \cdots, V_m\}$ 是无忧的，并用 $R(\mathcal{V})$ 来表示向量 $(R(V_1), \cdots, R(V_m))$。在本文中，我们将无差别

地使用“子空间”和“投影算符”。

定义 4.3 (图上的哈密尔顿量)**.** 给定一个二部图 $G_B = ([m],[n],E_B)$ 和局域哈密尔顿量 $\mathcal{V} = \{V_1,\cdots,V_m\}$，如果对于任意的 $i \in [m]$，Π_{V_i} 平凡地作用在 $[n] \setminus \mathcal{N}(i)$ 中的 qudit 上，我们称 $\mathcal{V} = \{V_1,\cdots,V_m\}$ 同 G_B 一致，记为 $\mathcal{V} \sim G_B$。因此，我们可以将 V_i 写成 $V_i^{loc} \otimes \mathcal{H}_{[n]\setminus\mathcal{N}(i)}$ 的形式，其中 $V_i^{loc} \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{N}(i)}$。

定义 4.4 (多变量独立集多项式)**.** 给定依赖图 $G_D = ([m],E)$ 和向量 $\mathbf{x} = (x_v : v \in [m])$，令 $I(G_D,\mathbf{x}) = \sum_{S\in Ind(G_D)}(-1)^{|S|}\prod_{v\in S} x_v$，其中 $Ind(G_D)$ 为 G_D 的所有独立集构成的集合。我们称 $I(G_D,\mathbf{x})$ 为 G_D 的*多变量独立集多项式*。

给定一个二部图 $G_B = ([m],[n],E)$ 和向量 $\mathbf{x} = (x_v : v \in [m])$，令 $I(G_B,\mathbf{x}) = I(G_D(G_B),\mathbf{x})$。类似的，我们称 $I(G_B,\mathbf{x})$ 为 G_B 的多变量独立集多项式。在不引起歧义的情况下，我们将 $I(G_B,\mathbf{x})$ 简记为 $I(G_B)$。

定义 4.5 (诱导子图)**.** 给定二部图 $G_B = ([m],[n],E_B)$ 和集合 $S \subseteq [m]$，令 $G_B(S)$ 表示仅包含 S 中的左顶点和全部右顶点的 G_B 的诱导子图。给定依赖图 $G_D = (V,E_D)$ 和集合 $S \subseteq V$，令 $G_D(S)$ 表示仅包含 S 中的顶点的 G_D 的诱导子图。

定义 4.6 (Shearer 界)**.** 给定二部图 $G_B = ([m],[n],E)$ 和向量 $\mathbf{x} = (x_v : v \in [m])$，如果存在 $S \subseteq [m]$ 满足 $I(G_B(S),\mathbf{x}) \le 0$，我们称 $(G_B,\mathbf{x})$ *超出了 Shearer 界*。否则，我们称 $(G_B,\mathbf{x})$ *在 Shearer 界之内*。

我们按如下方式定义相互作用图的量子内部。

定义 4.7 (二部图的量子内部)**.** 给定相互作用图 G_B，定义 G_B 的*量子内部*，$\mathcal{QI}(G_B)$，为

$$\mathcal{QI}(G_B) = \Big\{\mathbf{r} : \text{存在一个有理向量 } \mathbf{r}' \ge \mathbf{r} \text{ 使得对于任意的子空间集合 } \mathcal{V}\text{，如果 } \mathcal{V} \sim G_B\text{，且 } \mathcal{V} \text{ 的相对维度为 } \mathbf{r}'\text{，则 } R\Big(\sum_{V\in\mathcal{V}} V\Big) < 1 \text{ 始终成立。}\Big\}$$

量子版本局部引理（QLLL）就是要给出对 $\mathcal{QI}(G_B)$ 的刻画。

定义 4.8 (二部图的量子边界)**.** 二部图 $G_B = ([m],[n],E)$ 的*量子边界*，$\mathcal{Q}\partial(G_B)$，定义为

$$\mathcal{Q}\partial(G_B) = \Big\{\mathbf{r} \in (0,1]^m : \text{对于任意的 } \epsilon \in (0,1)\text{，} (1-\epsilon)\mathbf{r} \in \mathcal{QI}(G_B) \text{ 且 } (1+\epsilon)\mathbf{r} \notin \mathcal{QI}(G_B)\Big\}\text{。}$$

我们称 $\mathbf{r} \in \mathcal{Q}\partial(G_B)$ 为 G_B 的*一个量子边界向量*。

定义 4.9 (随机子空间). 给定二部图 $G_B = ([m],[n],E_B)$，有理向量 $\mathbf{r} = (r_1,\cdots,r_m)$ 和整数向量 $\mathbf{d} = (d_1,\cdots,d_m)$，如果 $\mathcal{H}_{[n]}$ 的某个子空间集合 $\mathcal{V}$ 满足 $\mathcal{V} \sim G_B$，$R(\mathcal{V}) = \mathbf{r}$，其中 $\mathcal{H}_{[n]}$ 满足 $\dim(\mathcal{H}_1,\cdots,\mathcal{H}_n) = \mathbf{d}$，我们称子空间集合 $\mathcal{V}$ 是 $(G_B,\mathbf{r},\mathbf{d})$ 情形下的一个实例。如果 $\mathcal{H}_{[n]}$ 的某个子空间集合 $\mathcal{V}$ 满足 $\mathcal{V} \sim G_B$，$R(\mathcal{V}) \le \mathbf{r}$，其中 $\mathcal{H}_{[n]}$ 满足 $\dim(\mathcal{H}_1,\cdots,\mathcal{H}_n) = \mathbf{d}$，我们称子空间集合 $\mathcal{V}$ 是 $(G_B,\le \mathbf{r},\mathbf{d})$ 情形下的一个实例。

进一步地，令 V_i^{loc} 表示 $\mathcal{H}_{\mathcal{N}(i)}$ 的相对维度为 $R(V_i^{loc}) = r_i$ 的随机子空间，这里采用哈尔测度（Haar measure）。如果 $\dim(\mathcal{H}_1,\cdots,\mathcal{H}_n) = \mathbf{d}$，且对于任意的 $i \in [m]$，$V_i = V_i^{loc} \otimes \mathcal{H}_{[n]\setminus\mathcal{N}(i)}$，我们称 $\mathcal{H}_{[n]}$ 的子空间集合 $\mathcal{V}$ 是 $(G_B,\mathbf{r},\mathbf{d})$ 情形下的一个随机实例。

4.2 量子版本的主要工具

几何化定理是由 Laumann 等人建立起来的重要工具 (Laumann 等, 2009)。利用几何化定理，我们可以通过证明“存在性”来证明“几乎一定满足”。

定理 4.1 (几何化定理 (Laumann 等, 2009)). *给定二部图 $G_B = ([m],[n],E_B)$，维度向量 $\mathbf{d}$ 和相对维度向量 $\mathbf{r}$，如果存在 $(G_B,\mathbf{r},\mathbf{d})$ 情形下的实例 $\{V_i^*\}_{i\in[m]}$ 满足 $R(\sum_{i\in[m]} V_i^*) = 1$，则 $(G_B,\mathbf{r},\mathbf{d})$ 情形下的随机实例 $\mathcal{V}$ 以概率 1 满足 $R(\sum_{i\in[m]} V_i) = 1$。*

独立集多项式是证明中用到的另一个工具。对于任意的有理数 $r \in (0,1)$，令 $M(r)$ 表示将 r 写成真分数时的分母。由独立集多项式的定义，即定义4.4，容易验证独立集多项式满足如下这些性质。

命题 4.2. *给定二部图 $G_B = ([m],[n],E_B)$ 和向量 $\mathbf{r}$，我们有：*

(a) 若 $\mathbf{r}$ 是有理向量，则 $I(G_B)$ 能够被写成一个以 $\Pi_{i=1}^m M(r_i)$ 为分母的分数；

(b) 对于任意的 $i \notin S \subsetneq [m]$，$I(G_B(S\cup\{i\})) = I(G_B(S)) - r_i \cdot I(G_B(S\backslash\Gamma_i))$；

(c) 设右顶点 n 满足 $\mathcal{N}(n) = [t]$，则 $I(G_B) = I(G_B([m]\backslash[t])) - \sum_{l=1}^t r_l \cdot I(G_B([m]\backslash\Gamma_l^+))$；

(d) 对于任意的 $\emptyset \subsetneq S \subsetneq [m]$，如果 S 中的顶点与 $[m]\backslash S$ 的顶点在 $G_D(G_B)$ 中不相邻，则 $I(G_B) = I(G_B(S)) \cdot I(G_B([m]\backslash S))$。

如定理1.2所示，独立集多项式给出了抽象版本局部引理的紧的条件。同时，还可以证明，独立集多项式满足如下性质。

命题 4.3. *给定二部图 $G_B = ([m],[n],E_B)$ 和向量 $\mathbf{r} \in (0,1]^m$，如果对于任意的 $S \subsetneq [m]$，$I(G_B(S),\mathbf{r}) > 0$，则*

(a) 对于任意的 $S \subseteq S' \subseteq [m]$，$I(G_B(S)) \geq I(G_B(S'))$；

(b) 对于任意的 $S \subseteq [m]$，$I(G_B(S)) \leq 1$；

(c) 如果 $m \geq 2$，则对于任意的 $i \in [m]$，$r_i < 1$；

(d) 如果 $I(G_B, \mathbf{r}) \leq 0$，则 $G_D(G_B)$ 是连通的。

证明. (a)&(b) 对于任意的 $i \notin S \subsetneq [m]$，由命题4.2 (b)，我们有 $I(G_B(S \cup \{i\})) = I(G_B(S)) - r_i \cdot I(G_B(S \backslash \Gamma_i)) \leq I(G_B(S))$。也就是说，随着 S 的增大，$I(G_B(S))$ 非增。因此，我们有对于任意的 $S \subseteq S' \subseteq [m]$，$I(G_B(S)) \geq I(G_B(S'))$。进一步地，对于任意的的 $S \subseteq [m]$，我们有 $I(G_B(S)) \leq I(G_B(\emptyset)) = 1$。

(c) 如果 $r_i = 1$，则 $I(G_B(\{i\})) = 0$，这与假设 $I(G_B(S), \mathbf{r}) > 0$ 对任意的 $S \subsetneq [m]$ 成立相矛盾。

(d) 假设存在 $\emptyset \subsetneq S \subsetneq [m]$ 使得 S 中的顶点与 $[m] \backslash S$ 中的顶点在 $G_D(G_B)$ 中不相邻。由命题4.2 (d) 有，$I(G_B) = I(G_B(S)) I(G_B([m] \backslash S)) \leq 0$。因此，我们有 $I(G_B(S)) \leq 0$ 或 $I(G_B([m] \backslash S)) \leq 0$，由此导出矛盾。 □

我们还将用到如下命题。

命题 4.4. 如果存在 $(G_B, \mathbf{r}, \mathbf{d})$ 情形下的实例 $\mathcal{V}$ 张满整个空间，则对于任意的 $\mathbf{d}'$ 满足 d'_j 是 d_j 的倍数，$(G_B, \mathbf{r}, \mathbf{d}')$ 情形下的随机实例以概率 1 张满整个空间。

证明. 不失一般性，假设 $\mathbf{d}' = (d_1, \cdots, d_{n-1}, k \cdot d_n)$，其中 $k \geq 1$ 是整数。令 $\bigotimes_{i \in [n]} \mathcal{H}'_i$ 为某个维度为 $\dim(\mathcal{H}'_1, \cdots, \mathcal{H}'_n) = \mathbf{d}'$ 的希尔伯特空间。我们将第 n 个 qudit，$\mathcal{H}'_n$，分解成 k 个正交的子空间 $\mathcal{H}'_n = \bigoplus_{l \in [k]} \mathcal{H}'_{nl}$，其中对于任意的 $l \in [k]$，$\dim(\mathcal{H}'_{nl}) = d_n$。则对于任意的 $l \in [k]$，我们有 $\mathcal{H}'_{[n-1]} \otimes \mathcal{H}'_{nl}$ 的维度均为 $\mathbf{d}$，因此可由某个相对于 $\mathcal{H}'_{[n-1]} \otimes \mathcal{H}'_{nl}$ 的相对维度为 $\mathbf{r}$ 的子空间集合 $\mathcal{V}_l \sim G_B$ 张满。令 $\mathcal{V}' = \bigoplus_{l \in [k]} \mathcal{V}_l$，容易验证 $\mathcal{V}'$ 是 $(G_B, \mathbf{r}, \mathbf{d}')$ 情形下的一个实例，且 $\mathcal{V}'$ 张满 $\mathcal{H}'_{[n]}$。由几何化定理，我们有 $(G_B, \mathbf{r}, \mathbf{d}')$ 情形下的随机实例以概率 1 张满 $\mathcal{H}'_{[n]}$。 □

4.3 Shearer 界对量子版本局部引理是紧的

在本节中，我们将证明 Shearer 界对量子版本局部引理是紧的。Sattath 等 (2016) 已经证明了 $I(G_B, \mathbf{r})$ 是未被覆盖的子空间的相对维度的下界，即有如下定理。

定理1.3 (子空间版本). 给定二部图 $G_B=([m],[n],E_B)$ 和有理向量 $\mathbf{r}\in(0,1]^m$, 如果 $(G_B,\mathbf{r})$ 在 Shearer 界之内, 则对于任意的相对维度为 $\mathbf{r}$ 的子空间集合 $\mathcal{V}=\{V_1,\cdots,V_m\}$，$1-R(\sum_{i=1}^m V_i)\geq I(G_B,\mathbf{r})$。

因此，我们只需证明下界 $I(G_B,\mathbf{r})$ 是可以达到的。令 $\mathbf{1}$ 表示所有元素均为 1 的向量。

定理 4.5. 给定二部图 $G_B=([m],[n],E_B)$ 和有理向量 $\mathbf{r}=(r_1,\cdots,r_m)\in(0,1]^m$,

(a) 如果 $(G_B,\mathbf{r})$ 超出了 Shearer 界, 则存在 $\mathbf{d}=(d_1,\cdots,d_n)\leq \Pi_{i=1}^m M(r_i)^{2^{2m}}\cdot\mathbf{1}$ 使得 $(G_B,\mathbf{r},\mathbf{d})$ 情形下的随机实例 $\mathcal{V}$ 满足 $\mathbb{P}(R(\sum_{i\in[m]}V_i)=1)=1$。

(b) 否则, $(G_B,\mathbf{r})$ 在 Shearer 界之内。则存在 $\mathbf{d}=(d_1,\cdots,d_n)\leq \Pi_{i=1}^m M(r_i)^{2^{2m+3}}\cdot\mathbf{1}$ 使得 $(G_B,\mathbf{r},\mathbf{d})$ 情形下的随机实例 $\mathcal{V}$ 满足 $\mathbb{P}(R(\sum_{i\in[m]}V_i)=1-I(G_B,\mathbf{r}))=1$。

之前提到过，利用几何化定理，我们可以通过证明“存在性”来证明“几乎一定满足”。为了证明存在性，我们在归纳的过程中使用随机构造。以下的例子展示了我们证明定理4.5 (a) 的主要思想。

例 4.1. 定理4.5 (a) 的证明是通过对 G_B 的左顶点数进行归纳。假设定理对所有左顶点数不超过 3 的二部图成立。接下来，我们以长为 4 的圈二部图为例来说明如何进行归纳。考虑圈二部图 $G_B=([4],[4],E)$，其中 $E=\{(i,i),(i,i+1 \pmod 4)),i\in[4]\}$)。设 $\mathbf{r}=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$。

因为 G_B 的基图是一个长为 4 的圈, 因此, $I(G_B,\mathbf{r})=1-\sum_{i=1}^4 r_i+r_1\cdot r_3+r_2\cdot r_4=0$。我们采用如下随机构造：令 $\mathcal{H}_2:=e_1\oplus e_2\simeq\mathbb{C}^2$，且

1. $V_1^{loc}=V_1'\otimes e_1$，其中 V_1' 是 $\mathcal{H}_1$ 的相对维度为 $R(V_1')=\frac{2}{3}$ 的随机子空间,
2. $V_2^{loc}=e_2\otimes V_2'$，其中 V_2' 是 $\mathcal{H}_3$ 的相对维度为 $R(V_2')=\frac{2}{3}$ 的随机子空间,
3. V_3^{loc} 是 $\mathcal{H}_3\otimes\mathcal{H}_4$ 的相对维度为 $R(V_3)=\frac{1}{4}$ 的随机子空间,
4. V_4^{loc} 是 $\mathcal{H}_4\otimes\mathcal{H}_1$ 的相对维度为 $R(V_4)=\frac{1}{4}$ 的随机子空间。

其中 $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_3,\mathcal{H}_4$ 的维度，(d_1,d_3,d_4)，将会在之后确定。

考虑子空间 $e_1\otimes\mathcal{H}_{1,3,4}:=\mathcal{H}'$ 及相应的哈密尔顿量 $V_1\cap\mathcal{H}',V_3\cap\mathcal{H}',V_4\cap\mathcal{H}'$。容易验证，这些哈密尔顿量相对于 $\mathcal{H}'$ 的相对维度分别为 $\frac{2}{3},\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{4}$。因为这个子系统的基图是一条长为 3 的路径，则其独立集多项式为 $1-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=0$。因此，由归纳假设，存在 d_1',d_3' 和 d_4' 使得 $V_1\cap\mathcal{H}',V_3\cap\mathcal{H}',V_4\cap\mathcal{H}'$ 以概率 1 张满 $\mathcal{H}'$。类似的，存在 d_1'',d_3'' 和 d_4'' 使得 $V_2+V_3+V_4$ 以概率 1 覆盖 $e_2\otimes\mathcal{H}_{1,3,4}$。令向量 (d_1,d_3,d_4) 满足对于任意的 $i\in[3]$，d_i 是 d_i' 和 d_i'' 的公倍数。由命题4.4结合

union bound 有 $\{V_i\}_{i=1}^4$ 以概率 1 张满全空间。我们已经证明了“存在性”。结合几何化定理，我们有定理4.5 (a) 对长为 4 的圈二部图和相对维度向量 $\mathbf{r} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ 成立。

现在，我们来证明定理4.5。

证明. *(a)*. 我们对 G_B 中的左顶点数进行归纳。
归纳基础：G_B 只有一个左顶点。此时，定理显然成立。
归纳假设：定理对所有左顶点数不超过 $m-1$ 的二部图成立。
归纳：考虑有 m 个左顶点的二部图 G_B。令 $S \subseteq [m]$ 满足 $I(G_B(S), \mathbf{r}) \leq 0$ 且对于任意的 $S' \subseteq [m]$，如果 $|S'| < |S|$，则 $I(G_B(S'), \mathbf{r}) > 0$。则我们有 $(G_B(S), \mathbf{r})$ 超出了 Shearer 界。

如果 $S \subsetneq [m]$，则由归纳假设，存在 $\mathbf{d} \leq \Pi_{i\in S} M(r_i)^{2^{2m}} \cdot \mathbf{1}$ 使得 $(G_B(S), \mathbf{r}, \mathbf{d})$ 情形下的某个实例 $\mathcal{V}$ 满足 $R(\sum_{i\in S} V_i) = 1$。令 $\mathbf{d}' = \Pi_{i\notin S} M(r_i)^{2^{2m}} \cdot \mathbf{d} \leq \Pi_{i=1}^{m} M(r_i)^{2^{2m}} \cdot \mathbf{1}$，由命题4.4有，存在 $(G_B(S), \mathbf{r}, \mathbf{d}')$ 情形下的子空间集合 $\mathcal{V}'$ 张满整个空间。对于任意的 $i \notin S$，因为所有的 $\dim(\mathcal{H}_j)$ 均为 $M(r_i)$ 的倍数，我们可以从 $\mathcal{H}_{\mathcal{N}(i)}$ 中任意选取一个相对维度为 r_i 的子空间作为 V_i^{loc}。由此，我们得到了一个 $(G_B, \mathbf{r}, \mathbf{d}')$ 情形下的子空间集合张满整个空间。由几何化定理，我们有本定理成立。

接下来我们假设 $S = [m]$，则由假设 S 满足 $I(G_B(S'), \mathbf{r}) > 0$ 对于任意的 $|S'| < |S|$ 成立，我们有对于任意的 $T \subsetneq [m]$，$I(G_B(T), \mathbf{r}) > 0$ 成立。由命题4.3 (d) 有，$G_D(G_B)$ 是连通的。因此，G_B 中一定存在某个右顶点同至少两个左顶点相邻。不失一般性，我们假设右顶点 n 满足条件且 $\mathcal{N}(n) = [t]$，其中 $t \geq 2$。

由几何化定理，我们只需要证明存在相对维度为 $\mathbf{r}$ 的子空间集合 $\{V_1, \cdots, V_m\}$ 张满整个空间。构造 $V_1, \cdots, V_m$ 如下。将 $\mathcal{H}_n$ 任意分解为 t 个正交的子空间 $\mathcal{H}_n^1, \cdots, \mathcal{H}_n^t$，其中对于任意的 $i \in [t]$，

$$\dim(\mathcal{H}_n^i) := \frac{r_i \cdot I(G_B([m]\backslash\Gamma_i^+))}{\sum_{l=1}^{t} r_l \cdot I(G_B([m]\backslash\Gamma_l^+))} \cdot \dim(\mathcal{H}_n). \tag{4.1}$$

接下来我们证明这是一个合理的分解。我们需要说明以下三点：(4.1) 的分母不为 0，这些正交子空间的维度之和即为整个空间的维度，存在 $\dim(\mathcal{H}_n)$ 使得每个 $\mathcal{H}_n^i$ 的维度都是正整数。上述这三点均成立，因为

1. 对于任意的 $i \in [t]$，由假设 $r_i > 0$ 和 $I(G_B(T), \mathbf{r}) > 0$ 对任意的 $T \subsetneq [m]$ 成立，我们有 $r_i \cdot I(G_B([m]\backslash\Gamma_i^+)) > 0$。

2. 由 $\mathcal{H}_n^i$ 的定义，我们有 $\sum_{l=1}^{t} \dim(\mathcal{H}_n^l) = \dim(\mathcal{H}_n)$。

3. 由命题4.3 (b) 有，$I(G_B([m]\backslash[t])) \leq 1$。同时，由命题4.2 (b) 有，$I(G_B) = I(G_B([m]\backslash\{1\})) - r_1 \cdot I(G_B([m]\backslash\Gamma_1^+)) \geq 0-1\cdot 1 \geq -1$。因此，由命题4.2 (c) 有，$\sum_{l=1}^t r_l \cdot I(G_B([m]\backslash\Gamma_l^+)) = I(G_B([m]\backslash[t])) - I(G_B) \leq 2$。对于任意的 $i \in [t]$，对 $G_B([m]\backslash\Gamma_i^+)$ 应用命题4.2 (a) 有，$r_i \cdot I(G_B([m]\backslash\Gamma_i^+))$ 可以被写成一个以 $\Pi_{i\in[m]\backslash\Gamma_i} M(r_i)$ 为分母的真分数。又因为 $\sum_{l=1}^t r_l \cdot I(G_B([m]\backslash\Gamma_l^+)) \leq 2$，则存在 $d_n \leq 2\Pi_{i=1}^m M(r_i)$ 使得所有的 $\dim(\mathcal{H}_n^i)$ 均为正整数。由命题4.3 (c)，我们有 $r_i < 1$。因此，$M(r_i) \geq 2$。则有 $d_n \leq 2\Pi_{i=1}^m M(r_i) \leq \Pi_{i=1}^m M(r_i)^{2^{2m}}$。

因此，可按如下方式选定相对于 $\mathcal{H}_{[n]}$ 的相对维度为 $\mathbf{r}$ 的子空间集合 $\{V_1, \ldots, V_m\}$，其中，$\mathcal{H}_1, \cdots, \mathcal{H}_{n-1}$ 的维度，$(d_1, \cdots, d_{n-1})$，将在之后确定:

- 对于任意的 $i \leq t$，如果 $r_i \cdot \frac{\dim(\mathcal{H}_n)}{\dim(\mathcal{H}_n^i)} \leq 1$，令 V_i^{loc} 为 $\mathcal{H}_{\mathcal{N}(i)\backslash\{n\}} \otimes \mathcal{H}_n^i$ 的一个相对于 $\mathcal{H}_{\mathcal{N}(i)\backslash\{n\}} \otimes \mathcal{H}_n^i$ 的相对维度为 $r_i \cdot \frac{\dim(\mathcal{H}_n)}{\dim(\mathcal{H}_n^i)}$ 的子空间；否则，令 V_i^{loc} 为 $(\mathcal{H}_{\mathcal{N}(i)\backslash\{n\}} \otimes \mathcal{H}_n^i) \oplus (V_i^{loc,of} \otimes (\bigoplus_{l\neq i} \mathcal{H}_n^l))$，其中 $V_i^{loc,of}$ 是 $\mathcal{H}_{\mathcal{N}(i)\backslash\{n\}}$ 的一个相对于 $\mathcal{H}_{\mathcal{N}(i)\backslash\{n\}}$ 的相对维度为 $(r_i \cdot \frac{\dim(\mathcal{H}_n)}{\dim(\mathcal{H}_n^i)} - 1) \cdot \frac{\dim(\mathcal{H}_n)}{\sum_{l\neq i}\dim(\mathcal{H}_n^l)}$ 的任意子空间。
- 对于任意的 $i > t$，令 V_i^{loc} 为 $\mathcal{H}_{\mathcal{N}(i)}$ 的一个相对于 $\mathcal{H}_{\mathcal{N}(i)}$ 的相对维度为 r_i 的随机子空间。

给定 $i \in [t]$，考虑子空间 $\mathcal{H}_{[n-1]} \otimes \mathcal{H}_n^i$ 以及相应的哈密尔顿量 $V_i, V_{t+1}, \cdots, V_m$ 在这个子空间上的投影。一方面，如果 $r_i \cdot \frac{\dim(\mathcal{H}_n)}{\dim(\mathcal{H}_n^i)} \leq 1$，则 V_i 在这个子空间的相对维度为 $r_i \cdot \frac{\dim(\mathcal{H}_n)}{\dim(\mathcal{H}_n^i)}$，而 $V_{t+1}, \cdots, V_m$ 在这个子空间的相对维度保持不变。因此，由命题4.2 (b) 有，这个子系统的独立集多项式为 $I(G_B([m]\backslash[t])) - r_i \cdot \frac{\dim(\mathcal{H}_n)}{\dim(\mathcal{H}_n^i)} \cdot I(G_B([m]\backslash\Gamma_i^+))$。由 (4.1) 有

$$I(G_B([m]\backslash[t])) - r_i \frac{\dim(\mathcal{H}_n)}{\dim(\mathcal{H}_n^i)} I(G_B([m]\backslash\Gamma_i^+)) = I(G_B([m]\backslash[t])) - \textstyle\sum_{l=1}^t r_l \cdot I(G_B([m]\backslash\Gamma_l^+)).$$

由命题4.2 (c) 有

$$I(G_B([m]\backslash[t])) - \textstyle\sum_{l=1}^t r_l \cdot I(G_B([m]\backslash\Gamma_l^+)) = I(G_B).$$

由假设 $S = [m]$ 及 $I(G_B(S), \mathbf{r}) \leq 0$，我们有 $I(G_B) \leq 0$。结合上述两个不等式，我们有

$$I(G_B([m]\backslash[t])) - r_i \cdot \frac{\dim(\mathcal{H}_n)}{\dim(\mathcal{H}_n^i)} \cdot I(G_B([m]\backslash\Gamma_i^+)) = I(G_B) \leq 0.$$

因此，由归纳假设，有存在 $(d_1^{(i)}, \cdots, d_{n-1}^{(i)}) \leq \left(M(r_i \cdot \frac{\dim(\mathcal{H}_n)}{\dim(\mathcal{H}_n^i)}) \cdot \Pi_{i=t+1}^m M(r_i)\right)^{2^{2(m-t+1)}} \cdot \mathbf{1}$，使得若 $(d_1, \cdots, d_{n-1}) = (d_1^{(i)}, \cdots, d_{n-1}^{(i)})$，则 $V_i, V_{t+1}, \cdots, V_m$ 以概率 1 张满 $\mathcal{H}_{[n-1]} \otimes \mathcal{H}_n^i$。由 $M(r_i \cdot \frac{\dim(\mathcal{H}_n)}{\dim(\mathcal{H}_n^i)}) \leq \Pi_{i=1}^m M(r_i)$ 有

$$(d_1^{(i)}, \cdots, d_{n-1}^{(i)}) \leq \left(M(r_i \cdot \frac{\dim(\mathcal{H}_n)}{\dim(\mathcal{H}_n^i)}) \cdot \Pi_{i=t+1}^m M(r_i)\right)^{2^{2(m-t+1)}} \cdot \mathbf{1} \leq \Pi_{i=1}^m M(r_i)^{2^{2(m-t+1)}\cdot 2} \cdot \mathbf{1}$$

另一方面，如果 $r_i \cdot \frac{\dim(\mathcal{H}_n)}{\dim(\mathcal{H}_n^i)} > 1$，由 V_i^{loc} 的定义，我们有 $\mathcal{H}_{[n-1]} \otimes \mathcal{H}_n^i \subseteq V_i$。同时，容易验证 $V_i^{loc,of}$ 相对于 $\mathcal{H}_{\mathcal{N}\setminus\{n\}}$ 的相对维度可以被写成一个分母不超过 $\Pi_{i=1}^m M(r_i)^2$ 的真分数。因此，存在

$$(d_1^{(i)}, \cdots, d_{n-1}^{(i)}) \leq \Pi_{i=1}^m M(r_i)^3 \cdot \mathbf{1} \leq \Pi_{i=1}^m M(r_i)^{2^{2(m-t+1)} \cdot 2} \cdot \mathbf{1}$$

使得若 $(d_1, \cdots, d_{n-1}) = (d_1^{(i)}, \cdots, d_{n-1}^{(i)})$，则 V_i^{loc} 和 $V_{t+1}, \cdots, V_m$ 的维度均为正整数。又由 V_i 和 $V_{t+1}, \cdots, V_m$ 的定义有，$V_i, V_{t+1}, \cdots, V_m$ 以概率 1 张满空间 $\mathcal{H}_{[n-1]} \otimes \mathcal{H}_n^i$。

对于任意的 $j \in [n-1]$，令 d_j 为 $d_j^{(1)}, \cdots, d_j^{(t)}$ 的最小公倍数。显然，对于任意的 $i \in [t]$，$V_i, V_{t+1}, \cdots, V_m$ 以概率 1 张满 $\mathcal{H}_{[n-1]} \otimes \mathcal{H}_n^i$。由 union bound，有 $V_1, \cdots, V_m$ 以概率 1 张满全空间 $\mathcal{H}_{[n]}$。由几何化定理，有 $(G_B, \mathbf{r}, \mathbf{d})$ 情形下的随机实例 $\mathcal{V}$ 以概率 1 张满全空间 $\mathcal{H}_{[n]}$。又因为 $(d_1^{(i)}, \cdots, d_{n-1}^{(i)}) \leq \Pi_{i=1}^m M(r_i)^{2^{2(m-t+1)} \cdot 2} \cdot \mathbf{1}$ 且 $t \geq 2$，容易验证 $(d_1, \cdots, d_{n-1}) \leq \Pi_{i=1}^m M(r_i)^{2^{2(m-t+1)} \cdot 2t} \cdot \mathbf{1} \leq \Pi_{i=1}^m M(r_i)^{2^{2m}} \cdot \mathbf{1}$。

(b). 给定 $G_B = ([m], [n], E_B)$ 和有理向量 $\mathbf{r} = (r_1, \cdots, r_m)$ 满足 $(G_B, \mathbf{r})$ 在 Shearer 界之内，则 $I(G_B, \mathbf{r}) > 0$。我们按如下方式构造 G_B' 和 $\mathbf{r}'$。令 $G_B' = ([m+1], [n], E_B')$，其中 $E_B' = E_B \cup \{(m+1, 1), (m+1, 2), \cdots, (m+1, n)\}$，即 $\mathcal{N}(m+1) = [n]$。令 $\mathbf{r}'$ 为 $(r_1, \cdots, r_m, r_{m+1})$，其中 $r_{m+1} = I(G_B, \mathbf{r}) > 0$。则 G_B' 的独立集多项式为 $I(G_B', \mathbf{r}') = I(G_B, \mathbf{r}) - r_{m+1} = 0$。

容易验证 $M(r_{m+1}) \leq \Pi_{i=1}^m M(r_i)$。由此，由本定理 (a) 有，存在

$$\mathbf{d} = (d_1, \cdots, d_n) \leq \Pi_{i=1}^{m+1} M(r_i)^{2^{2(m+1)}} \cdot \mathbf{1} \leq \Pi_{i=1}^m M(r_i)^{2^{2m+3}} \cdot \mathbf{1}$$

使得 $(G_B', \mathbf{r}', \mathbf{d})$ 情形下的随机子空间的集合 $\mathcal{V}'$ 满足 $\mathbb{P}(R(\sum_{i \in [m+1]} V_i') = 1) = 1$。因此，由 $R(\sum_{i \in [m]} V_i') \geq R(\sum_{i \in [m+1]} V_i') - R(V_m')$ (Ambainis 等, 2012)，我们有 $(G_B, \mathbf{r}, \mathbf{d})$ 情形下的随机子空间集合 $\mathcal{V} = \{V_1', \cdots, V_m'\}$ 满足 $\mathbb{P}(R(\sum_{i \in [m]} V_i') \geq 1 - I(G_B, \mathbf{r})) = 1$。又由定理1.3有，$R(\sum_{i \in [m]} V_i') \leq 1 - I(G_B, \mathbf{r})$，我们有 $\mathbb{P}(R(\sum_{i \in [m]} V_i') = 1 - I(G_B, \mathbf{r})) = 1$。 □

接下来，我们证明本章的主定理，定理1.4。该定理可以看作是定理4.5的推广。定理4.5中的结论只对某些特定维度的 qudit 才成立。定理1.4将定理4.5中的结论推广到了所有维度足够大的 qudit 上。

定理1.4 (形式化版本). *对于任意的二部图 $G_B = ([m], [n], E_B)$ 和 $\epsilon > 0$，存在正整数向量 $\mathbf{D} = (D_1, \cdots, D_n) \leq \lceil 2\lceil 2m/\epsilon \rceil^{m2^{2m}} mn/\epsilon \rceil \cdot \mathbf{1}$ 使得对于任意的正整数向量 $\mathbf{d} \geq \mathbf{D}$，有理向量 $\mathbf{r} \in (0,1]^m$ 和 $\mathbf{r}' \geq \mathbf{r} + \frac{\epsilon}{m} \cdot \mathbf{1}$ 有*

(a) 如果 $(G_B,\mathbf{r})$ 超出了 Shearer 界，则 $(G_B,\mathbf{r}',\mathbf{d})$ 情形下几乎所有的子空间集合均满足 $R(\sum_{i=1}^m V_i')=1$，因此，$(G_B,\mathbf{r},\mathbf{d})$ 情形下的几乎所有子空间均满足 $R(\sum_{i=1}^m V_i)\in[1-\epsilon,1]$。

(b) 否则，$(G_B,\mathbf{r}',\mathbf{d})$ 情形下的几乎所有子空间 $\mathcal{V}'$ 均满足 $R(\sum_{i=1}^m V_i')\geq 1-I(G_B,\mathbf{r})$，因此，$(G_B,\mathbf{r},\mathbf{d})$ 情形下的几乎所有子空间 $\mathcal{V}$ 均满足 $R(\sum_{i=1}^m V_i)\in[1-I(G_B,\mathbf{r})-\epsilon,1-I(G_B,\mathbf{r})]$。

证明. 令 $\mathcal{R}=\left\{\frac{1}{\lceil 2m/\epsilon\rceil}(z_1,\cdots,z_m):\text{对于任意的}i\in[m],z_i\in[\lceil 2m/\epsilon\rceil-1]\right\}\cup\{\mathbf{1}\}$ 为一个有理向量的有限集合，则不难验证，对于任意的 $\mathbf{r}\in(0,1]^m$，存在有理的 $\mathbf{r}^*\in\mathcal{R}$ 使得 $\mathbf{r}\leq\mathbf{r}^*\leq\mathbf{r}+\frac{\epsilon}{2m}\cdot\mathbf{1}$。由定理4.5有，对于任意有理的 $\mathbf{r}^*\in\mathcal{R}$，存在 $\mathbf{d}^*\leq\Pi_{i=1}^m M(r_i^*)^{2^{2m}}\leq\lceil 2m/\epsilon\rceil^{m2^{2m}}$ 使得 $(G_B,\mathbf{r}^*,\mathbf{d}^*)$ 情形下，

1. 如果 (G_B,r^*) 超出了 Shearer 界，则存在实例 $\mathcal{V}^*$ 张满整个空间；
2. 否则，存在实例 $\mathcal{V}^*$ 满足 $R(\sum_{i\in[m]}V_i^*)=1-I(G_B,\mathbf{r}^*)$。

对于任意的 $j\in[n]$，令 D_j 为 $\max_{\mathbf{r}*\in\mathcal{R}}\lceil 2d_j^*mn/\epsilon\rceil$。则有 $D_j\leq\lceil 2\lceil 2m/\epsilon\rceil^{m2^{2m}}mn/\epsilon\rceil$。

(a). 假设 $(G_B,\mathbf{r})$ 超出了 Shearer 界，且 $\mathbf{r}^*$ 满足 $\mathbf{r}\leq\mathbf{r}^*\leq\mathbf{r}+\frac{\epsilon}{2m}\cdot\mathbf{1}$。对于任意的 $\mathbf{d}\geq\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{r}'\geq\mathbf{r}^*+\frac{\epsilon}{2m}\cdot\mathbf{1}$，令 $\mathcal{H}_{[n]}$ 的维度为 $\dim(\mathcal{H}_1,\cdots,\mathcal{H}_n)=\mathbf{d}$。我们构造一个 $\mathcal{H}_{[n]}$ 的维度为 $\dim(\mathcal{V}')\leq\mathbf{r}'$ 的子空间集合 $\mathcal{V}'\sim G_B$，使得 $\mathcal{V}'$ 张满全空间。则由几何化定理，我们有结论成立。对 $\mathcal{V}'$ 的构造如下：

1. 对于任意的 $j\in[n]$，将 $\mathcal{H}_j$ 分解成两个正交的子空间 $\mathcal{H}_j=\mathcal{H}_j^a\oplus\mathcal{H}_j^b$，其中 $\dim(\mathcal{H}_j^a)=\lfloor\frac{d_j}{d_j^*}\rfloor\cdot d_j^*$，$\dim(\mathcal{H}_j^b)=d_j\pmod{d_j^*}$。因为 $\dim(\mathcal{H}_j^a)$ 是 d_j^* 的倍数，则由命题4.4有，存在相对于 $\mathcal{H}_{[n]}^a$ 的相对维度为 $\mathbf{r}^*$ 的子空间集合 $\mathcal{V}^a\sim G_B$ 张满 $\mathcal{H}_{[n]}^a$。
2. 对于任意的 $i\in[m]$，令 $V_i':=V_i^a\oplus(\sum_{j\in\mathcal{N}(i)}\mathcal{H}_j^b\otimes\mathcal{H}_{[n]\setminus\{j\}})$。

接下来，我们只需要验证 $\mathcal{V}'$ 张满全空间且 $R(\mathcal{V}')\leq\mathbf{r}^*+\frac{\epsilon}{2m}\cdot\mathbf{1}$。因为对于任意的 $j\in[n]$ 和 $i\in\mathcal{N}(j)$，$\mathcal{H}_j^b\otimes\mathcal{H}_{[n]\setminus\{j\}}\subseteq V_i'$ 且 $\sum_{i\in[m]}V_i^a=\mathcal{H}_{[n]}^a$，我们有 $\mathcal{V}'$ 张满全空间。同时，对任意的 $j\in[n]$，我们有 $\dim(\mathcal{H}_j^b)\leq d_j^*$。因此，对任意的 $i\in[m]$，我们有 $R(V_i')\leq R(V_i^a)+\sum_{j\in\mathcal{N}(i)}\frac{d_j^*}{d_j}\leq r_i^*+n\cdot\frac{\epsilon}{2mn}\leq r_i^*+\frac{\epsilon}{2m}$。

(b). 假设 $(G_B,\mathbf{r})$ 在 Shearer 界之内且 $\mathbf{r}^*$ 满足 $\mathbf{r}\leq\mathbf{r}^*\leq\mathbf{r}+\frac{\epsilon}{2m}\cdot\mathbf{1}$。按如下方式定义 $I(G_B,\mathbf{r}^*)^+$。如果 $(G_B,\mathbf{r}^*)$ 在 Shearer 界之内，令 $I(G_B,\mathbf{r}^*)^+=I(G_B,\mathbf{r}^*)$，否则，令 $I(G_B,\mathbf{r}^*)^+=0$。我们将证明，对于任意的 $\mathbf{d}\geq\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{r}'\geq\mathbf{r}^*+\frac{\epsilon}{2m}\cdot\mathbf{1}$，$(G_B,\mathbf{r}',\mathbf{d})$ 情形下几乎所有的子空间集合 $\mathcal{V}'$ 均满足 $R(\sum_{i\in[m]}V_i')\geq 1-I(G_B,\mathbf{r}^*)^+\geq 1-I(G_B,\mathbf{r})$，即可完成证明。

按定理4.5(b) 的证明定义 $G_B{}'$。令 $\mathbf{r}''=(\mathbf{r}',I(G_B,\mathbf{r}^*)^+)$。则由几何化定理，我

们只需证明存在 $(G_B{}', \leq \mathbf{r}'', \mathbf{d})$ 情形下的实例 $\mathcal{V}'' \cup \{V''_{m+1}\}$ 张满全空间 $\mathcal{H}_{[n]}$。对 $\mathcal{V}'' \cup \{V''_{m+1}\}$ 的构造类似于本定理 (a) 的证明。

1. 按照本定理 (a) 的证明定义 $\mathcal{H}_j^a$ 和 $\mathcal{H}_j^b$。因为 $\dim(\mathcal{H}_j^a)$ 是 d_j^* 的倍数，由命题4.4有，存在相对于 $\mathcal{H}_{[n]}^a$ 的相对维度为 $(\mathbf{r}^*, I(G_B, \mathbf{r}^*)^+)$ 的子空间集合 $\mathcal{V}^a \cup \{V_{m+1}^a\} \sim G_B{}'$ 张满空间 $\mathcal{H}_{[n]}^a$。

2. 对于任意的 $i \in [m]$，令 $V_i'' := V_i^a \oplus (\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \mathcal{H}_j^b \otimes \mathcal{H}_{[n]\setminus\{j\}})$。令 $V''_{m+1} = V^a_{m+1}$。类似于本定理 (a) 的证明，容易验证 $\mathcal{V}'' \cup \{V''_{m+1}\}$ 张满全空间 $\mathcal{H}_{[n]}$，对于任意的 $i \leq m$，$R(V_i'') \leq r_i^* + \frac{\epsilon}{2m}$ 且 $R(V''_{m+1}) \leq I(G_B, \mathbf{r}^*)^+$。 □

第 5 章　对易版本局部引理

令 $G_B = ([m],[n],E_B)$ 为一个给定的相互作用图，$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$ 为一个给定的相对维度向量。在本章中，不失一般性，我们假设相互作用图 G_B 一定是连通的，且相对维度一定是正数，即 $\mathbf{r} \in (0,1]^m$。

5.1　对易版本的定义和记号

首先，我们来定义一个二部图的对易内部，对易边界，以及对易版本与抽象版本有差异。

Ambainis 等 (2012) 已经证明了子空间的相对维度满足的一系列性质。这里，我们额外证明一些只有对易子空间才满足的性质。这些性质将在后续的定义和证明中被隐含地用到。

引理 5.1. *对易子空间* $V, W, V_1, \cdots, V_n$ *满足如下性质：*

(i) 正交补空间的独立性：令 $V^{\perp}$ *为* V *的正交补空间，则* $R(V|W) + R(V^{\perp}|W) = 1$。*因此，如果* $R(V \cap W) = R(V) \cdot R(W)$，*则* $R(V^{\perp} \cap W) = R(V^{\perp}) \cdot R(W)$。

(ii) 容斥原理：

$$R\left(\sum_{i=1}^{n} V_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} R(V_{i_1} \cap \cdots \cap V_{i_k}) \right).$$

证明. 因为子空间 $V, W, V_1, V_2, \cdots, V_n$ 对易，则所有这些子空间可以相对于同一组正交基，$\{|e_1\rangle, \cdots, |e_t\rangle\}$，对角化。我们按如下方式定义概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$。令 $\Omega = \{|e_1\rangle, \cdots, |e_t\rangle\}$，$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$，对每个 $i \in [n]$，令 $\mathbb{P}(|e_i\rangle) = 1/t$。令 $A_V = \{|e_i\rangle : |e_i\rangle \in V\}$，并类似地定义 $A_W, A_{V_1}, \cdots, A_{V_n}$。则 $R(V) = \mathbb{P}(A_V)$，$R(W) = \mathbb{P}(A_W)$，$A_{V \cap W} = A_V \cap A_W$，$A_{V+W} = A_V \cup A_W$。且对 $A_{V_1}, \cdots, A_{V_n}$，有类似结论成立。因此，由经典概率论的相关结论，容易验证上述两个性质成立。 □

定义 5.1 (二部图的对易内部)**.** 给定相互作用图 G_B，定义 G_B 的对易内部，$\mathcal{CI}(G_B)$，为

$$\mathcal{CI}(G_B) = \Big\{ \mathbf{r} : \text{存在有理向量 } \mathbf{r}' \ge \mathbf{r} \text{ 使得对于任意的对易子空间集合 } \mathcal{V}\text{，如果 } \mathcal{V} \sim G_B\text{，且 } \mathcal{V} \text{ 的相对维度为 } \mathbf{r}'\text{，则 } R\big(\sum_{V \in \mathcal{V}} V\big) < 1 \text{ 始终成立。} \Big\}$$

对易版本局部引理（CLLL）就是要给出对 $\mathcal{CI}(G_B)$ 的刻画。

以下两个结论，引理5.2和推论5.3，是为了说明我们对对易内部的定义是合理的。

引理 5.2 (单调性引理)**.** *假设存在相对维度为 $R(\mathcal{V}) = \mathbf{r}$ 的对易子空间集合 $\mathcal{V} \sim G_B$ 满足 $R\big(\sum_{V\in\mathcal{V}} V\big) = 1$。则对于任意的有理向量 $\mathbf{r}' \geq \mathbf{r}$，存在一个相对维度为 $R(\mathcal{V}') = \mathbf{r}'$ 的对易子空间集合 $\mathcal{V}' \sim G_B$ 使得 $R\big(\sum_{V'\in\mathcal{V}'} V'\big) = 1$。*

变量版本局部引理和量子版本局部引理的单调性是显然的，但对易版本局部引理要求子空间是对易的，所以单调性没那么显然。这里我们通过增加 qudit 来构造新的对易子空间集合。

证明. 不失一般性，假设 $\mathbf{r}' = (r_1 + \epsilon, r_2, \cdots, r_m)$，$V_1$ 作用在 $\mathcal{H}_1$ 上。因为 $\mathbf{r}'$ 和 $\mathbf{r}$ 都是有理向量，则 $\frac{\epsilon}{1-r_1}$ 也是有理向量。设 $\frac{\epsilon}{1-r_1} = \frac{a}{b}$，其中 a 和 b 都是整数。设 $\mathcal{H}_1^c$ 是一个相对维度为 $\dim(\mathcal{H}_1^c) = b$ 的 qudit，令 $\mathcal{H}_1' = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^c$，对于任意的 $i \geq 2$，令 $\mathcal{H}_i' = \mathcal{H}_i$。因此，全空间为 $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i' = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_1^c$。

我们按如下方式构造子空间集合 $\mathcal{V}'$。令 $V_1' = (\mathcal{H}_1^c \otimes V_1) + \big(W \otimes \big(\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i\big)\big)$，其中 W 是 $\mathcal{H}_1^c$ 的任意一个维度为 a 的子空间。对于任意的 $i \geq 2$，令 $V_i' = V_i \bigotimes \mathcal{H}_1^c$。不难验证，$\mathcal{V}'$ 满足引理中的条件。 □

以下是引理5.2的一个直接推论。

推论 5.3. *给定二部图 $G_B = ([m], [n], E_B)$ 和有理向量 $\mathbf{r} \in \mathcal{CI}(G_B)$，则 $R\big(\sum_{V\in\mathcal{V}} V\big) < 1$ 对于任意的相对维度为 $R(\mathcal{V}) = \mathbf{r}$ 的对易子空间 $\mathcal{V} \sim G_B$ 成立。*

因此，$\mathcal{CI}(G_B)$ 包含两个集合：一个是*有理向量* $\mathbf{r}$ 的集合，其中 $\mathbf{r}$ 满足对任意相对维度为 $R(\mathcal{V}) = \mathbf{r}$ 的对易子空间集合 $\mathcal{V} \sim G_B$ 均有 $R\big(\sum_{V\in\mathcal{V}} V\big) < 1$ 成立。另一个是*无理向量*的集合，这些向量使 $\mathcal{CI}(G_B)$ 变得连续。

定义 5.2 (二部图的对易边界)**.** 二部图 $G_B = ([m], [n], E)$ 的*对易边界*，$\mathcal{C}\partial(G_B)$，定义为

$$\mathcal{C}\partial(G_B) = \Big\{\mathbf{r} \in (0,1]^m : \text{对于任意的 } \epsilon \in (0,1)\text{，} (1-\epsilon)\mathbf{r} \in \mathcal{CI}(G_B)$$
$$\text{且 } (1+\epsilon)\mathbf{r} \notin \mathcal{CI}(G_B)\Big\}\text{。}$$

我们称 $\mathbf{r} \in \mathcal{C}\partial(G_B)$ 为 G_B 的一个*对易边界向量*。

由上述定义，以下命题是显然的。

命题 5.4. 给定二部图 $G_B=([m],[n],E_B)$，对于任意的 $\mathbf{r}\in(0,1]^m$，存在唯一的 $\lambda>0$ 使得 $\lambda\mathbf{r}\in\mathcal{C}\partial(G_B)$。

类似于变量版本局部引理，互斥是关于对易版本局部引理的很多证明的关键。

定义 5.3 (互斥的对易子空间)**.** 给定二部图 G_B 和对易子空间集合 $\mathcal{V}$, 如果 $\mathcal{V}\sim G_B$ 且对于任意的 j 和 $i\in\Gamma_j$，$R(V_i\cap V_j)=0$，即 $V_i\perp V_j$，我们称子空间集合 $\mathcal{V}$ 相对于二部图 G_B 是*互斥的*。在不引起歧义的情况下，我们会省略相对于哪个二部图。如果我们称某个子空间集合是互斥的，我们默认这个子空间集合是对易的。

考虑二部图的抽象内点 $\mathcal{I}(G_B)$ 和抽象边界 $\partial(G_B)$ (定义3.6和3.7)。由定理1.2, 容易验证 $\mathcal{I}(G_B)$ 是一个开集，因此 $\mathcal{I}(G_B)\cap\partial(G_B)=\emptyset$。

对于任意的二部图 G_B，容易验证 $\mathcal{I}(G_B)\subseteq\mathcal{CI}(G_B)$。类似于变量版本局部引理的情况，我们关心抽象边界 $\partial(G_B)$ 和对易边界 $\mathcal{C}\partial(G_B)$ 是否相同。

定义 5.4 (对易版本和抽象版本有差异)**.** 给定二部图 G_B 和向量 $\mathbf{r}\in(0,1]^m$，如果 $\partial(G_B)$ 和 $\mathcal{C}\partial(G_B)$ 在这个方向有差异, 即存在 $\lambda>0$ 使得 $\lambda\mathbf{r}\in(\mathcal{CI}(G_B)\cup\mathcal{C}\partial(G_B))\setminus(\mathcal{I}(G_B)\cup\partial(G_B))$，我们称二部图 G_B *在方向* $\mathbf{r}$ *上对易版本和抽象版本有差异*，否则我们称 G_B 在这个方向没有差异。我们称二部图 G_B 对易版本和抽象版本有差异，当且仅当它在某个方向上对易版本和抽象版本有差异。否则我们称 G_B 没有差异。

在本章中，我们提到有差异即是指对易版本与抽象版本有差异。

注. 对差异的另一种自然的定义如下：二部图 G_B 在方向 $\mathbf{r}$ 上对易版本和抽象版本有差异当且仅当存在 $\lambda>0$ 使得 $\lambda\mathbf{r}\in\mathcal{CI}(G_B)\setminus\mathcal{I}(G_B)$，否则，我们称二部图 G_B 在方向 $\mathbf{r}$ 上无差异。此定义仅在如下情况和定义5.4有所不同：存在 $\lambda_0>0$ 使得 $\lambda_0\mathbf{r}\in\mathcal{C}\partial(G_B)\cap\mathcal{CI}(G_B)$ 但 $\lambda_0\mathbf{r}\in\partial(G_B)$，$\lambda_0\mathbf{r}\notin\mathcal{I}(G_B)$。通俗地说，在方向 $\mathbf{r}$ 上，对易边界和抽象边界是相同的，但对易内部和抽象内部却不同。因为此种情况边界是相同的，在本文中我们将这种情况定义为没有差异。

5.2 对易版本的主要工具

在本节中，我们将给出研究对易版本局部引理的重要工具，主要包含一个对易版本与变量版本局部引理等价的充分条件以及若干推导规则。

5.2.1 孤立的 qudit 是经典的

在本小节中，我们证明定理5.8，该定理使得我们可以将变量版本局部引理的很多重要工具推广到对易版本局部引理。

定义 5.5. 给定二部图 $G_B = ([m],[n],E_B)$，如果对于任意的 $i_1, i_2 \in \mathcal{N}(j)$ 有 $\mathcal{N}(i_1) \cap \mathcal{N}(i_2) = \{j\}$，我们称右顶点 $j \in [n]$ 是孤立的。

引理 5.5. *给定二部图 $G_B = ([m],[n],E_B)$，如果存在对易的子空间集合 $\mathcal{V} \sim G_B$ 张满全空间，则存在另一个对易的子空间集合 $\mathcal{V}' \sim G_B$ 张满全空间，其中 $\mathcal{V}'$ 满足 $R(\mathcal{V}') = R(\mathcal{V})$ 且对于任意孤立的 $j \in [n]$，$\mathcal{H}_j$ 是经典的。*

证明引理5.5的主要思路是借助Bravyi 和 Vyalyi (2005) 的结构引理来刻画对易的局域哈密尔顿量的结构。

引理 5.6 (结构引理 (Bravyi 和 Vyalyi, 2005))**.** *假设 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ 是复欧几里得空间，Π_V 和 Π_W 分别是作用在 $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z}$ 上的投影算符。如果 $[\Pi_V, \Pi_W] = 0$，则 $\mathcal{Y}$ 可以被分解成一些正交的子空间 $\mathcal{Y} = \bigoplus_i \mathcal{Y}_i = \bigoplus \mathcal{Y}_{i1} \otimes \mathcal{Y}_{i2}$，使得对于任意的 i：*

1. *Π_V 和 Π_W 保持 $\mathcal{Y}_i$；*
2. *限制到 $\mathcal{Y}_i$ 上，Π_V 和 Π_W 仅分别非平凡地作用在 $\mathcal{Y}_{i1}$ 和 $\mathcal{Y}_{i2}$ 上。*

也就是说，V 可以被分解成 $V = \bigoplus_i V|_{\mathcal{Y}_{i1}} \otimes \mathcal{Y}_{i2}$，其中 $V|_{\mathcal{Y}_{i1}} \subseteq \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}_{i1}$，类似的，$W$ 可以被分解成 $W = \bigoplus_i W|_{\mathcal{Y}_{i2}} \otimes \mathcal{Y}_{i1}$，其中 $W|_{\mathcal{Y}_{i2}} \subseteq \mathcal{Y}_{i2} \otimes \mathcal{Z}$。

推论 5.7. *在引理5.6的条件下，如果 V, W 张满全空间，则存在仅依赖于 $\mathcal{Y}$ 的子空间 $W' \subseteq W$ 使得 V, W' 张满全空间。*

证明. 因为 Π_V 和 Π_W 保持所有的 $\mathcal{Y}_i$，则 W, V 张满全空间意味着对任意一个 $\mathcal{Y}_i$，将 W 和 V 限制到 $\mathcal{Y}_i$ 上时，W 和 V 张满 $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}_i \otimes \mathcal{Z}$。进一步地，受限的 V 和 W 不共享任何 subqudit，因此，受限的 V 和 W 中有一个是 $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}_i \otimes \mathcal{Z}$。令 $S = \{i :$ 将 W 限制在 $\mathcal{Y}_i$ 上时是 $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}_i \otimes \mathcal{Z}\}$，令 $W' = \bigoplus_{i \in S} \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}_i \otimes \mathcal{Z}$。容易验证，$W'$ 满足本推论的要求。 □

现在，我们来证明引理5.5。

对引理5.5的证明. 不失一般性，假设右顶点 $j \in [n]$ 是孤立的，且 $\mathcal{N}(j) = [k]$。通过迭代使用引理5.6，可以将 $\mathcal{H}_j$ 分解成若干个切片，且每个切片 $\mathcal{H}_{jl}$ 由 k 个 subqudit，$\mathcal{H}_{jl1} \otimes \mathcal{H}_{jl2} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{jlk}$，组成，使得对于任意的 $i \in [k]$，V_i 限制到每

个切片上时只依赖于 $\mathcal{H}_{jli}$。由推论5.7，不难验证，每个受限的 V_i 可以由一个平凡地作用在相应切片里的 subqudit 上的子空间 V_i'' 替换，且得到的子空间集合依然张满全空间。换句话说，$\mathcal{H}_j$ 通过适当地旋转可以变成经典的。注意到 $R(V_i'')$ 可能比 $R(V_i)$ 小，类似于引理5.2的证明，通过适当添加 qudit，我们可以得到一个新的相对维度为 $R(\mathcal{V}') = R(\mathcal{V})$ 的子空间集合 $\mathcal{V}' \sim G_B$ 张满全空间，且保持 $\mathcal{H}_j$ 是经典的。 □

接下来的定理是引理5.5的直接推论。该定理说明了，很多最常见的二部图，其变量版本和对易版本局部引理的紧的条件是相同的。

定理 5.8. 给定二部图 G_B,如果其所有的右顶点都是孤立的,则 $\mathcal{CI}(G_B) = \mathcal{VI}(G_B)$。

5.2.2 推导规则

在第3章中，我们建议了一系列推导规则，利用这些推导规则，我们可以从一个二部图变量版本与抽象版本有差异/无差异，推导出另一个二部图有差异/无差异。由此，我们证明了一系列二部图，特别是组合二部图，是有差异/无差异的。在本小节中，我们将证明这些推导规则对对易版本局部引理也适用，并利用这些推导规则证明，树的对易版本与抽象版本是无差异的。

在第3章中，我们定义了六种对二部图上的基本操作及它们的逆操作，分别是删叶子变量，删叶子事件，复制事件，复制变量，删事件，删边。接下来的定理将刻画这些操作如何影响对易版本与抽象版本是否有差异。

定理 5.9. 一个二部图 G_B 对易版本与抽象版本有差异，当且仅当它在应用了删叶子变量，删叶子事件，复制事件，复制变量及这些操作的逆操作之后依然是有差异的。

定理 5.10. 一个对易版本与抽象版本无差异的二部图在应用了删事件操作和删边的逆操作之后依然是无差异的。

定理 5.11. 一个对易版本与抽象版本有差异的二部图在应用了删边操作和删事件的逆操作之后依然是有差异的。

上述几个定理的证明与定理3.26，3.27，3.28类似，这里略去。

借助推导规则可以证明，如果一个二部图是树，则这个二部图对易版本和抽象版本无差异。树二部图，如一维的链 (Movassagh 等, 2010) 和正则树 (Shearer, 1985; Heilmann 和 Lieb, 1972; Coudron 和 Movassagh, 2012; Sattath 等, 2016)，得到了大量学者的关注。

定理 5.12. 如果二部图 G_B 是一棵树，则 G_B 对易版本和抽象版本无差异。

定理5.12与定理3.32的证明类似，这里略去。另外，因为 $\mathcal{I}(G_B) \subseteq \mathcal{CI}(G_B) \subseteq \mathcal{VI}(G_B)$，定理5.12也可以看作是定理3.32的直接推论。

5.3 树的边界

在第3.5节和上一节中，我们已经证明树的抽象、变量和对易版本局部引理是没有差异的。因为抽象版本局部引理和量子版本局部引理紧的条件是相同的，因此，树的抽象、变量、对易和量子版本局部引理紧的条件均相同。在本节中，我们将显式给出这一条件。对于对易版本局部引理，我们的结果还适用于 qudit 的维度给定的情况。

给定树二部图 $G_B = ([m], [n], E_B)$ 及 qudit 的维度，不失一般性，我们假设树根是右顶点。进一步的，我们还假设所有的树叶也是右顶点。之所以可以这样假设，是因为向二部图中添加右顶点作为叶子，并将相应 qudit 的维度设为 1，不影响二部图的边界。

定理 5.13. 给定树二部图 $G_B = ([m], [n], E_B)$，有理向量 $\mathbf{r}$ 和整数向量 $\mathbf{d}$，对 G_B 中的任意顶点 k，令 $\mathcal{C}_k$ 为 k 的孩子节点的集合。则 $(G_B, \leq \mathbf{r}, \mathbf{d})$ 情形下的所有对易子空间集合均是无忧的当且仅当存在 $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_n)$ 满足 $q_j < d_j$ 且

$$q_j = \begin{cases} 0 & \text{如果顶点} j \text{是 } G_B \text{ 的叶节点}, \\ \sum_{i \in \mathcal{C}_j} \lfloor r_i \cdot d_j \cdot \prod_{j' \in \mathcal{C}_i} \frac{d_{j'}}{d_{j'} - q_{j'}} \rfloor & \text{否则}. \end{cases} \tag{5.1}$$

证明. 我们对 G_B 中左顶点的数目进行归纳。

归纳基础：二部图中只包含一个左顶点时定理显然成立。

归纳假设：定理对所有左顶点数不超过 $m-1$ 个的二部图成立。

归纳：考虑包含 m 个左顶点的二部图 G_B。令 j^* 表示一个后代中的右顶点都是叶节点的右顶点，即 j^* 到叶节点的距离不超过 2。

必要性：假设不存在满足条件的向量 $\mathbf{q}$。对 G_B 中的任意顶点 j，令 T_j 表示以右顶点 j 为根的子树。因为对于 G_B 的任意叶节点 j，可以直接将 q_j 设为 0，使得 $q_j < d_j$ 成立。则一定存在着某个右顶点 j'，满足如下条件：当按照 (5.1) 定义向量 $\mathbf{q}$ 时，j' 的后代中的右顶点均满足 $q_j < d_j$，但 $q_{j'} \geq d_{j'}$ 且 j' 要么是 j^* 的祖先，要么是 j^* 本身。

依据 j' 是否是 j^*，我们分两种情况讨论：

情况一：$j' = j^*$。我们有 $q_{j^*} = \sum_{i\in\mathcal{C}_{j^*}}\lfloor r_i d_{j^*}\prod_{j\in\mathcal{C}_i}\frac{d_j}{d_j-q_j}\rfloor = \sum_{i\in\mathcal{C}_{j^*}}\lfloor r_i d_{j^*}\rfloor \geq d_{j^*}$。因此，存在对易子空间 $\{\mathcal{H}^i_{j^*}\}_{i\in\mathcal{C}_{j^*}}$ 满足 $\mathcal{H}^i_{j^*} \subseteq \mathcal{H}_{j^*}, \dim(\mathcal{H}^i_{j^*}) = \lfloor r_i d_{j^*}\rfloor$ 且 $\bigoplus_{i\in\mathcal{C}_{j^*}}\mathcal{H}^i_{j^*} = \mathcal{H}_{j^*}$。对每一个 $i \in \mathcal{C}_{j^*}$，令 V_i 为 $\mathcal{H}^i_{j^*}\otimes\mathcal{H}_{[n]\setminus j^*}$。因此，我们有 $R(V_i) = \lfloor r_i d_{j^*}\rfloor/d_{j^*} \leq r_i$ 且 $\{V_i\}_{i\in\mathcal{C}_{j^*}}$ 张满 $\mathcal{H}_{[n]}$。

情况二：$j' \neq j^*$。我们有 $q_{j^*} < d_{j^*}$。将 $\mathcal{H}_{j^*}$ 分解成两个正交的子空间 $\mathcal{H}^a_{j^*}\oplus\mathcal{H}^b_{j^*}$，其中 $\dim(\mathcal{H}^a_{j^*}) = \sum_{i\in\mathcal{C}_{j^*}}\lfloor r_i d_{j^*}\rfloor$，$\dim(\mathcal{H}^b_{j^*}) = d_{j^*} - \dim(\mathcal{H}^a_{j^*})$。因为 $\dim(\mathcal{H}^b_{j^*}) > 0$，则这样的正交分解是存在的。令 $S \subset [n]$ 为 $(T_{j'}\setminus T_{j^*})\cup\{j^*\}$ 中的右顶点的集合。令 $\mathcal{H}'_{j^*} = \mathcal{H}^b_{j^*}$。对于任意的 $j \in S\setminus\{j^*\}$，令 $\mathcal{H}'_j$ 为 $\mathcal{H}_j$。令 $\mathbf{d}'$ 为 $\mathcal{H}'_S$ 的维度向量。令 T' 为 G_B 在 $(T_{j'}\setminus T_{j^*})\cup\{j^*\}$ 中的顶点上的诱导子图。令 $\mathbf{r}'$ 为 T' 中的左顶点对应的相对于空间 $\mathcal{H}^b_{j^*}\otimes\mathcal{H}_{[n]\setminus j^*}$ 的相对维度。设 T' 中的某个左顶点 i 对应的相对于 $\mathcal{H}_{[n]}$ 的相对维度为 r_i。如果 $j^* \in \mathcal{C}_i$，令 $r'_i = r_i d_{j^*}/\dim(\mathcal{H}^b_{j^*})$，否则，令 $r'_i = r_i$。令 $\mathbf{q}'$ 为按照 (5.1) 依据 $T', \mathbf{r}', \mathbf{d}'$ 算得的向量。则 $q'_{j^*} = 0$。我们有 $d'_{j^*} - q'_{j^*} = d_{j^*} - \sum_{i\in\mathcal{C}_{j^*}}\lfloor r_i d_{j^*}\rfloor = d_{j^*} - q_{j^*}$。因此，容易验证，对于任意的 $j \in S\setminus\{j^*\}$，$q'_j = q_j$ 成立。由归纳假设，存在 $(T', \leq \mathbf{r}', \mathbf{d}')$ 情形下的对易子空间集合 $\mathcal{V}'$ 张满 $\mathcal{H}^b_{j^*}\otimes\mathcal{H}_{[n]\setminus j^*}$。进一步的，类似于情况一，我们可以构造相对维度满足 $R(V_i) \leq r_i$ 的对易的子空间集合 $\{V_i\}_{i\in\mathcal{C}_{j^*}}$ 张满 $\mathcal{H}^a_{j^*}\otimes\mathcal{H}_{[n]\setminus j^*}$。因此，$\mathcal{V} = \mathcal{V}'\cup\{V_i\}_{i\in\mathcal{C}_{j^*}}$ 张满 $\mathcal{H}_{[n]}$。

充分性：假设 $(G_B, \mathbf{r}', \mathbf{d})$ 情形下的对易子空间集合 $\mathcal{V}$ 张满 $\mathcal{H}_{[n]}$，其中 $\mathbf{r}' \leq \mathbf{r}$。因为 G_B 的所有右顶点都是孤立的，不失一般性，我们假设 $\mathcal{V}$ 中的所有子空间都可以相对于标准计算基对角化。令 $\mathcal{V}'$ 表示 $(G_B\setminus T_{j^*})\cup\{j^*\}$ 中的左顶点对应的子空间集合。同时，我们假设 $d_{j^*} - \sum_{i\in\mathcal{C}_{j^*}}\lfloor r'_i d_{j^*}\rfloor > 0$，否则 $q_{j^*} = \sum_{i\in\mathcal{C}_{j^*}}\lfloor r'_i d_{j^*}\rfloor \geq d_{j^*}$，我们有结论成立。

对于任意的 $i \in \mathcal{C}_{j^*}$，令 $\mathcal{H}_{j^*}(i)$ 为由集合 $\{|e\rangle \in \mathcal{H}_{j^*} : |e\rangle\otimes\mathcal{H}_{[n]\setminus j^*} \subseteq V_i\}$ 中的向量张成的空间。容易验证，$\dim(\mathcal{H}_{j^*}(i)) \leq \lfloor r'_i \cdot d_{j^*}\rfloor$。令 $\mathcal{H}^c_{j^*}$ 为 $(\bigoplus_{i\in\mathcal{C}_{j^*}}\mathcal{H}_{j^*}(i))$ 在空间 $\mathcal{H}_{j^*}$ 中的正交补空间，则 $\dim(\mathcal{H}^c_{j^*}) \geq d_{j^*} - \sum_{i\in\mathcal{C}_{j^*}}\lfloor r'_i d_{j^*}\rfloor$。因为 $\mathcal{V}$ 张满 $\mathcal{H}_{[n]}$，我们有 $\mathcal{V}'$ 张满 $\mathcal{H}^c_{j^*}\otimes\mathcal{H}_{[n]\setminus j^*}$。

令 $\mathcal{H}^d_{j^*}$ 为 $\mathcal{H}^c_{j^*}$ 的某个可以相对于标准计算基对角化的维度为 $d_{j^*} - \sum_{i\in\mathcal{C}_{j^*}}\lfloor r'_i d_{j^*}\rfloor$ 的子空间。对于任意的 $V'_j \in \mathcal{V}'$，令 $V''_j = V'_j \cap (\mathcal{H}^d_{j^*}\otimes\mathcal{H}_{[n]\setminus j^*})$。令 $\mathcal{V}'' = \{V''_j : V'_j \in \mathcal{V}'\}$。令 $S \subset [n]$ 为 $(G_B\setminus T_{j^*})\cup\{j^*\}$ 中的右顶点的集合。令 $\mathcal{H}'_{j^*} = \mathcal{H}^d_{j^*}$，对于任意的 $j \in S\setminus\{j^*\}$，令 $\mathcal{H}'_j$ 为 $\mathcal{H}_j$。令 $\mathbf{d}'$ 为 $\mathcal{H}'_S$ 的维度向量。令 $\mathbf{r}''$ 为 $\mathcal{V}''$ 相对于 $\mathcal{H}^d_{j^*}\otimes\mathcal{H}_{[n]\setminus j^*}$ 的相对维度。即设 i^* 为 j^* 的父节点。令 $r''_{i^*} = r'_{i^*}\cdot\frac{d_{j^*}}{d'_{j^*}}$。对于 $G_B\setminus(T_{j^*}\cup\{i^*\})$ 中的左顶点 i，令 $r''_i = r'_i$。容易验证，对于任意的 $j \in S\setminus\{j^*\}$，依据 $T', \mathbf{r}'', \mathbf{d}'$ 算得的

q_j 和依据 $G_B, \mathbf{r}', \mathbf{d}$ 算得的 q_j 是相同的，即要么值相等，要么同时无定义。

因为 $\mathcal{V}'$ 张满 $\mathcal{H}_{j^*}^c \otimes \mathcal{H}_{[n]\setminus j^*}$，我们有 $\mathcal{V}''$ 张满 $\mathcal{H}_{j^*}^d \otimes \mathcal{H}_{[n]\setminus j^*}$。由归纳假设，我们有存在 $j \in S \setminus \{j^*\}$ 满足依据 $T', \mathbf{r}'', \mathbf{d}'$ 算得的 q_j 无定义，则依据 $G_B, \mathbf{r}', \mathbf{d}$ 算得的 q_j 也无定义。不难验证，依据 $G_B, \mathbf{r}, \mathbf{d}$ 算得的 q_j 也无定义。 □

由定理5.13，我们有如下定理。

定理 5.14. 给定树二部图 $G_B = ([m], [n], E_B)$，我们有 $\mathcal{VI}(G_B) = \mathcal{CI}(G_B) = \mathcal{QI}(G_B) = \mathcal{I}(G_B)$。对于任意的 $\mathbf{r} \in (0,1)^m, \mathbf{r} \in \mathcal{I}(G_B)$ 当且仅当存在向量 $\mathbf{q} \in [0,1)^n$ 满足：如果 j 是二部图 G_B 的叶子，则 $q_j = 0$，否则，对于非叶子的右顶点 j，$q_j = \sum_{i \in \mathcal{C}_j} r_i \cdot \prod_{k \in \mathcal{C}_i} \frac{1}{1-q_k}$。

注意，上述定理不是定理1.2的直接推论。定理1.2中关于独立集多项式的方程组往往很难求解，而由定理5.14，我们可以高效地计算出树二部图的边界。

5.4 包含圈的二部图有差异

在本节中，我们将证明很多二部图对易版本和抽象版本有差异。

一个简单的观察是，如果二部图 G_B 变量版本与抽象版本无差异，则其对易版本也和抽象版本无差异。因此，由第3章的相关结论，我们有如下推论。

推论 5.15. 对于任意的 $n \geq 4$，$G_{n,n-1}$ 的对易版本与抽象版本无差异。

推论 5.16. 对于任意的常数 m，当 n 足够大时，$G_{n,n-m}$ 对易版本与抽象版本无差异。

另一方面，可以证明，所有的圈二部图对易版本与抽象版本有差异。不失一般性，我们可以假设圈二部图的任何两个相邻的左顶点只同一个公共的右顶点相连，即所有的右顶点都是孤立的。由定理5.8，我们有所有的圈二部图的变量边界和对易边界是相同的。因此，由定理3.33我们有如下推论。

推论 5.17. 所有的圈二部图对易版本和抽象版本有差异。

同时，由定理5.8和3.17，我们还可以得到圈二部图的对易边界。这里略去。

类似于推论3.34，借助于推导规则，我们可以证明如下结论：

推论 5.18. 所有包含圈二部图的二部图对易版本与抽象版本有差异。

如果一个二部图的基图不是弦图，则该二部图中一定包含一个圈二部图。因此，由定理5.14和推论5.18，我们有如下结论。

推论 5.19. 给定一个二部图，如果该二部图是树，则其对易版本与抽象版本无差异。否则，如果其基图不是弦图，则其对易版本与抽象版本有差异。

第 6 章 总结与展望

6.1 本文总结

在本文中，我们给出了变量版本和量子版本局部引理的紧的条件，并对一部分二部图，给出了对易版本局部引理的紧的条件。同时，我们还定性的研究了抽象版本、变量版本、对易版本和量子版本局部引理是否有差异。我们证明了对于任意的二部图 G_B，$\mathcal{I}(G_D(G_B)) = \mathcal{QI}(G_B) \subseteq \mathcal{CI}(G_B) \subseteq \mathcal{VI}(G_B)$。且存在二部图 G_B，使得 $\mathcal{QI}(G_B) \subset \mathcal{CI}(G_B)$。

对于变量版本局部引理，我们还显式地给出了两类二部图，即树和圈，的变量边界。同时，我们给出了二部图抽象版本和变量版本局部引理相同的充分必要条件，并借助该条件证明了，如果一个二部图是树，则其抽象版本和变量版本局部引理相同，如果一个二部图的基图不是弦图，则其抽象版本和变量版本局部引理不同。这一结果验证了人们长久以来的猜测，即一般而言，变量版本局部引理与抽象版本局部引理是不同的。我们还从依赖图出发研究了变量版本与抽象版本是否有差异。从而解决了Kolipaka 和 Szegedy (2011) 提出的开放问题。

对于对易版本局部引理，我们还证明了对于一大类二部图，变量版本与对易版本局部引理的边界是相同的。同时，对于二部图是树的情况，我们针对不同的 qudit 维度计算了局域哈密尔顿量的对易边界。

6.2 未来工作展望

针对本文中尚未完全解决的开放问题，我们有如下四个可能的研究方向。

二部图的对易边界 关于对易版本局部引理，还有如下两个问题没有完全解决：

问题 1. 对任意一个二部图 G_B，给出 $\mathcal{CI}(G_B)$ 的精确刻画。

问题 2. 是否存在二部图 G_B，使得 $\mathcal{CI}(G_B) \subseteq \mathcal{VI}(G_B)$。

解决这两个问题能进一步帮我们理解对易的能力，并回答从局部引理的角度而言，对易和经典是否存在差异。同时，也将为研究对易局域哈密尔顿量的可满足性问题提供新的工具。

量子版本局部引理中 qudit 维度的下界 我们在定理4.5中证明了 Shearer 界对量子版本局部引理是紧的。即如果 $(G_B, \mathbf{r})$ 超出了 Shearer 界，则一定存在同 G_B 一致的，相对维度为 $\mathbf{r}$ 的局域哈密尔顿量可以张满整个空间。但我们所构造的局域哈密尔顿量作用的 qudit 的维度非常大。则我们有如下问题:

问题 3. 给定二部图 G_B 和有理的相对维度向量 $\mathbf{r}$ 满足 $\mathbf{r} \notin \mathcal{QI}(G_B)$。求最小的 $\mathbf{d}$，使得存在 $(G_B, \mathbf{r}, \mathbf{d})$ 情形下的实例张满全空间。

定量刻画局部引理的边界 在本文中，我们着重于对二部图的变量、对易和量子边界进行定性地刻画。同时，我们也只是定性地讨论了不同版本的局部引理之间是否存在真包含关系。对相关问题的定量刻画涉及得较少。

问题 4. 给定一个二部图 G_B 和向量 $\mathbf{r}$，计算 $\lambda_V, \lambda_C, \lambda_Q$ 使得 $\lambda_Q \mathbf{r} \in \mathcal{Q}\partial(G_B), \lambda_C \mathbf{r} \in \mathcal{C}\partial(G_B), \lambda_V \mathbf{r} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$。

问题 5. 给定一个二部图 G_B 和向量 $\mathbf{r}$，计算 $\lambda_V - \lambda_C$ 和 $\lambda_C - \lambda_Q$，其中 $\lambda_Q \mathbf{r} \in \mathcal{Q}\partial(G_B)$, $\lambda_C \mathbf{r} \in \mathcal{C}\partial(G_B), \lambda_V \mathbf{r} \in \mathcal{V}\partial(G_B)$。

由定理3.47，我们有对任意一个二部图 G_B 和向量 $\mathbf{r}$ 计算 λ_V 是 #P-难的。因为我们在证明定理3.47时构造的事件集是互斥的，则不难验证，定理3.47的证明可以向对易和量子的情形推广。因此，对任意一个二部图 G_B 和向量 $\mathbf{r}$ 计算 λ_Q 和 λ_V 也是 #P-难的。但对某些图，还是可以尝试计算 λ_V, λ_C 和 λ_Q。

对 λ_V, λ_C 和 λ_Q 进行定量计算，将有助于这些局部引理的紧的条件得到更多的应用。对 $\lambda_V - \lambda_C$ 和 $\lambda_C - \lambda_Q$ 进行定量计算，能对这些局部引理的差异给出定量刻画。He 等 (2019) 针对对称的概率向量，即 $\mathbf{r} = \mathbf{1}$ 的情况，给出了 $\lambda_C - \lambda_Q$ 的首个非平凡的下界。如何得到更紧的下界，还需要考虑。

局部引理的算法化 我们证明了对于很多二部图，变量版本局部引理可以超出 Shearer 界。因为 Moser-Tardos 算法针对的是由变量生成的事件系统，则我们有如下问题:

问题 6. 对于某些二部图 G_B，Moser-Tardos 算法在 Shearer 界之外是否也是高效的。

类似的，我们证明了对于很多二部图，对易版本局部引理可以超出 Shearer 界。则我们有如下问题:

问题 7. *对于某些二部图 G_B，Gilyén 和 Sattath (2017) 的算法对于对易的局域哈密尔顿量在 Shearer 界之外是否也是高效的。*

洛瓦兹局部引理，尤其是构造性局部引理同采样存在着深刻的联系。如第2.2节所述，很多构造性局部引理的算法都是基于采样的。同时，在局部引理成立的范围内，当问题本身满足一定的*互斥*性质时，Moser-Tardos 算法可以用于均匀采样，且该算法的期望运行时间有精确的数学表示 (Guo 等, 2017; Guo 和 He, 2018)。则我们有如下问题:

问题 8. *在局部引理成立的范围内，如何对局域哈密尔顿量或对易的局域哈密尔顿量均匀采样。*

参考文献

ACHLIOPTAS D, ILIOPOULOS F. Focused stochastic local search and the Lovász local lemma [C]//Proceedings of the Twenty-Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2016a: 2024-2038.

ACHLIOPTAS D, ILIOPOULOS F. Random walks that find perfect objects and the Lovász local lemma[J]. Journal of the ACM (JACM), 2016, 63(3):22.

AHARONOV D, ELDAR L. On the complexity of commuting local hamiltonians, and tight conditions for topological order in such systems[C]//2011 IEEE 52th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). IEEE, 2011: 334-343.

AHARONOV D, KENNETH O, VIGDOROVICH I. On the complexity of two dimensional commuting local hamiltonians[J]. arXiv preprint arXiv:1803.02213, 2018.

ALON N. A parallel algorithmic version of the local lemma[J]. Random Structures & Algorithms, 1991, 2(4):367-378.

AMBAINIS A, KEMPE J, SATTATH O. A quantum Lovász local lemma[J]. Journal of the ACM (JACM), 2012, 59(5):24.

BECK J. An algorithmic approach to the Lovász local lemma[J]. Random Structures & Algorithms, 1991, 2(4):343-365.

BISSACOT R, FERNÁNDEZ R, PROCACCI A, et al. An improvement of the Lovász local lemma via cluster expansion[J]. Combinatorics, Probability and Computing, 2011, 20(05):709-719.

BRANDT S, FISCHER O, HIRVONEN J, et al. A lower bound for the distributed Lovász local lemma[C]//48th Annual Symposium on Theory of Computing (STOC), Cambridge, Massachusetts, USA. 2016.

BRAVYI S. Efficient algorithm for a quantum analogue of 2-sat[J]. Contemporary Mathematics, 2011, 536:33-48.

BRAVYI S, VYALYI M. Commutative version of the local hamiltonian problem and common eigenspace problem[J]. Quantum Information & Computation, 2005, 5(3):187-215.

CAI J, LU P, XIA M. Holographic algorithms by fibonacci gates and holographic reductions for hardness[C]//49th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2008, October 25-28, 2008, Philadelphia, PA, USA. 2008: 644-653.

CASTELNOVO C, CHAMON C, MUDRY C, et al. From quantum mechanics to classical statistical physics: Generalized rokhsar–kivelson hamiltonians and the “stochastic matrix form” decomposition[J]. Annals of Physics, 2005, 318(2):316-344.

CATARATA J D, CORBETT S, STERN H, et al. The Moser-Tardos resample algorithm: Where is the limit?(an experimental inquiry)[C]//2017 Proceedings of the Ninteenth Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX). SIAM, 2017: 159-171.

CHUNG K M, PETTIE S, SU H H. Distributed algorithms for the Lovász local lemma and graph coloring[C]//Proceedings of the 2014 ACM symposium on Principles of distributed computing. ACM, 2014: 134-143.

COUDRON M, MOVASSAGH R. Unfrustration condition and degeneracy of qudits on trees[J]. arXiv preprint arXiv:1209.4395, 2012.

CUBITT T S, SCHWARZ M. A constructive commutative quantum Lovász local lemma, and beyond[J]. Eprint Arxiv, 2012.

CZUMAJ A, SCHEIDELER C. A new algorithm approach to the general Lovász local lemma with applications to scheduling and satisfiability problems[C]//Proceedings of the thirty-second annual ACM symposium on Theory of computing. ACM, 2000: 38-47.

ERDŐS P, LOVÁSZ L. Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions[J]. Infinite and finite sets, 1975, 10(2):609-627.

ERDŐS P, SPENCER J. Lopsided lovász local lemma and latin transversals[J]. Discrete Applied Mathematics, 1991, 30(2-3):151-154.

ERDŐS P, SPENCER J. Lopsided Lovász local lemma and latin transversals[J]. Discrete Applied Mathematics, 1991, 30(2-3):151-154.

GEBAUER H, MOSER R A, SCHEDER D, et al. The Lovász local lemma and satisfiability[M]// Efficient Algorithms. Springer, 2009: 30-54.

GEBAUER H, SZABÓ T, TARDOS G. The local lemma is asymptotically tight for SAT[J]. Journal of the ACM (JACM), 2016, 63(5):43.

GHAFFARI M. An improved distributed algorithm for maximal independent set[C]//Proceedings of the Twenty-Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2016: 270-277.

GILYÉN A, SATTATH O. On preparing ground states of gapped hamiltonians: An efficient quantum Lovász local lemma[C]//2017 IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). 2017: 439-450.

GIOTIS I, KIROUSIS L, PSAROMILIGKOS K I, et al. Acyclic edge coloring through the Lovász local lemma[J]. Theoretical Computer Science, 2017, 665:40-50.

GOTTESMAN D, IRANI S. The quantum and classical complexity of translationally invariant tiling and hamiltonian problems[C]//2009 IEEE 50th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). IEEE, 2009: 95-104.

GUO H, HE K. Tight bounds for popping algorithms[J]. arXiv preprint arXiv:1807.01680, 2018.

GUO H, JERRUM M, LIU J. Uniform sampling through the Lovász local lemma[C]//Proceedings of the 49th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing. ACM, 2017: 342-355.

GUTTMANN A. Comment on'the exact location of partition function zeros, a new method for statistical mechanics'[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1987, 20(2):511.

HAEUPLER B, HARRIS D G. Parallel algorithms and concentration bounds for the Lovász local lemma via witness-dags[C]//Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. SIAM, 2017: 1170-1187.

HARRIS D G. Lopsidependency in the moser-tardos framework: beyond the lopsided Lovász local lemma[J]. ACM Transactions on Algorithms (TALG), 2016, 13(1):17.

HARRIS D G. Deterministic parallel algorithms for fooling polylogarithmic juntas and the Lovász local lemma[C]//Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. SIAM, 2017: 1188-1203.

HARRIS D G, SRINIVASAN A. A constructive algorithm for the Lovász local lemma on permutations[C]//Proceedings of the Twenty-Fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014: 907-925.

HARVEY N J A, SRIVASTAVA P, VONDRÁK J. Computing the independence polynomial in shearer's region for the LLL[J/OL]. CoRR, 2016, abs/1608.02282. http://arxiv.org/abs/1608.02282.

HARVEY N J, VONDRÁK J. An algorithmic proof of the Lovász local lemma via resampling oracles[C]//2015 IEEE 56th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). IEEE, 2015: 1327-1346.

HE K, LI L, LIU X, et al. Variable-version Lovász local lemma: Beyond shearer's bound[C]//58th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2017, Berkeley, CA, USA, October 15-17, 2017. 2017: 451-462.

HE K, LI Q, SUN X. quantum lovász local lemma: Shearer's bound is tight[C]//51th Annual Symposium on Theory of Computing (STOC), Phoenix, Arizona, USA. 2019.

HEILMANN O J, LIEB E H. Theory of monomer-dimer systems[J]. Communications in Mathematical Physics, 1972, 25(3):190-232.

KITAEV A Y. Fault-tolerant quantum computation by anyons[J]. Annals of Physics, 2003, 303(1): 2-30.

KOLIPAKA K, SZEGEDY M, XU Y. A sharper local lemma with improved applications[M]//Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques. Springer, 2012: 603-614.

KOLIPAKA K B R, SZEGEDY M. Moser and Tardos meet Lovász[C]//Proceedings of the forty-third annual ACM symposium on Theory of computing. ACM, 2011: 235-244.

KOLMOGOROV V. Commutativity in the algorithmic Lovász local lemma[C]//2016 IEEE 57th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). IEEE, 2016: 780-787.

LAUMANN C R, LÄUCHLI A M, MOESSNER R, et al. On product, generic and random generic quantum satisfiability[J]. Physical Review A, 2010, 81(6):359-366.

LAUMANN C, MOESSNER R, SCARDICCHIO A, et al. Phase transitions in random quantum satisfiability[J]. Bulletin of the American Physical Society, 2009, 54.

LU L, SZEKELY L A. A new asymptotic enumeration technique: the lovász local lemma[J]. arXiv preprint arXiv:0905.3983, 2009.

MCDIARMID C. Hypergraph colouring and the Lovász local lemma[J]. Discrete Mathematics, 1997, 167:481-486.

MOITRA A. Approximate counting, the lovasz local lemma, and inference in graphical models[C]//Proceedings of the 49th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing. ACM, 2017: 356-369.

MOLLOY M, REED B. Further algorithmic aspects of the local lemma[C]//Proceedings of the thirtieth annual ACM symposium on Theory of computing. ACM, 1998: 524-529.

MORAMPUDI S C, LAUMANN C R. Many-body systems with random spatially local interactions [J]. arXiv preprint arXiv:1808.08674, 2018.

MOSER R A, TARDOS G. A constructive proof of the general Lovász local lemma[J]. Journal of the ACM (JACM), 2010, 57(2):11.

MOVASSAGH R, FARHI E, GOLDSTONE J, et al. Unfrustrated qudit chains and their ground states[J]. Physical Review A, 2010, 82(1):16279-16288.

PEGDEN W. Highly nonrepetitive sequences: winning strategies from the local lemma[J]. Random Structures & Algorithms, 2011, 38(1-2):140-161.

PEGDEN W. The lefthanded local lemma characterizes chordal dependency graphs[J]. Random Structures & Algorithms, 2012, 41(4):546-556.

PEGDEN W. An extension of the moser–tardos algorithmic local lemma[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2014, 28(2):911-917.

RADHAKRISHNAN J, SRINIVASAN A. Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring[C]//1998 IEEE 39th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). IEEE, 1998: 684-693.

ROKHSAR D S, KIVELSON S A. Superconductivity and the quantum hard-core dimer gas[J]. Physical review letters, 1988, 61(20):2376.

SALAVATIPOUR M R. A $(1+\epsilon)$-approximation algorithm for partitioning hypergraphs using a new algorithmic version of the Lovász local lemma[J]. Random Structures & Algorithms, 2004, 25(1):68-90.

SATTATH O, ARAD I. A constructive quantum Lovász local lemma for commuting projectors[J]. Quantum Information & Computation, 2015, 15(11-12):987-996.

SATTATH O, MORAMPUDI S C, LAUMANN C R, et al. When a local hamiltonian must be frustration-free[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2016, 113(23):6433-6437.

SCHUCH N. Complexity of commuting hamiltonians on a square lattice of qubits[J]. Quantum Information & Computation, 2011, 11(11-12):901-912.

SCHWARZ M, CUBITT T S, VERSTRAETE F. An information-theoretic proof of the constructive commutative quantum Lovász local lemma[J]. arXiv preprint arXiv:1311.6474, 2013.

SCOTT A D, SOKAL A D. The repulsive lattice gas, the independent-set polynomial, and the Lovász local lemma[J/OL]. Journal of Statistical Physics, 2005, 118(5):1151-1261. https://doi.org/10.1007/s10955-004-2055-4.

SCOTT A D, SOKAL A D. On dependency graphs and the lattice gas[J]. Combinatorics, Probability & Computing, 2006, 15(1-2):253-279.

SHEARER J B. On a problem of Spencer[J]. Combinatorica, 1985, 5(3):241-245.

SPENCER J. Asymptotic lower bounds for Ramsey functions[J]. Discrete Mathematics, 1977, 20: 69-76.

TODO S. Transfer-matrix study of negative-fugacity singularity of hard-core lattice gas[J]. International Journal of Modern Physics C, 1999, 10(04):517-529.

WOOD D. The exact location of partition function zeros, a new method for statistical mechanics[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1985, 18(15):L917.

作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与研究成果

基本情况

姓名：何昆　性别：男　出生日期：1988 年 11 月 9 日　籍贯：湖北

教育经历

2015 年 9 月至今：　中科院计算所　博士研究生

2010 年 9 月-2013 年 12 月：　中科院计算所　硕士研究生

2006 年 9 月-2010 年 6 月：　武汉大学　本科生

在学期间发表的论文

[1]He K, Li Q, Sun, X. A Tighter Relation Between Sensitivity Complexity and Certificate Complexity. Theoretical Computer Science, 2019, 762, 1-12.

[2]He K, Li Q, Sun X. A Tighter Relation Between Sensitivity Complexity and Certificate Complexity[C]. 23rd International Computing and Combinatorics Conference, COCOON 2017, Hong Kong, China, August 3-5, 2017, Proceedings. Springer, 2017, 10392: 262.

[3]He K, Li L, Liu X, Wang Y, Xia M. Variable-Version Lovász Local Lemma: Beyond Shearer's Bound. 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). IEEE, 2017: 451-462.

[4]He K, Li Q, Sun X. Quantum Lovász Local Lemma: Shearer's Bound Is Tight. arXiv preprint arXiv:1804.07055, 2018. STOC 2019, to appear.

[5]Wang S, He K, Pan Y, Xia M. Rectangle Transformation Problem. Algorithmica (2019) 81: 2876. https://doi.org/10.1007/s00453-019-00563-y

在学期间获奖情况

2018 年　国家奖学金

2018 年　三好学生

2017 年　所长优秀奖

致　谢

光阴荏苒，日月如梭，博士四年的时光很快就过去了，而我来计算所也已经九年时间了。在博士论文完成之际，谨在此向帮助过我的老师、同学、家人和朋友们表示诚挚的谢意。

我由衷地感谢我的导师孙晓明老师，是孙老师为我打开了理论计算机的大门，让我可以进入这样一个深刻而优雅的领域。孙老师学术功底深厚，治学严谨，在学术上给了我非常多的指导。同时又视野开阔，谦和儒雅，在为人处世上给了我很多的帮助。在我做第一个课题时，孙老师每天都亲自指导。因为之前基础较差，我对 latex 较为生疏，写的证明也很粗糙，孙老师对我一直很有耐心。在那段时间，因为每天和孙老师讨论，我得到了快速的成长。到了高年级，孙老师给了我充分的研究自由，让我做自己想做的题目，同时尽力为我营造好的研究环境。除了学术上的收获，孙老师还经常教导我，对未来要有规划，这些都让我终生受益。

我由衷地感谢我在硕士阶段的导师贺思敏老师。感谢贺老师推荐我到孙老师这里读博，并积极向国外的专家推荐我。贺老师对学术研究的执着让我深感敬佩，对我学术生涯的关心让我深受感动。

我由衷地感谢实验室的老师和同学。感谢张家琳老师，杨光老师和田国敬老师，他们和我亦师亦友，给了我很多的指导。感谢实验室的同学们在学习和生活中给予的帮助。

我由衷地感谢所有的合作者。感谢软件所的夏盟佶老师、爱丁堡的郭珩老师、南京大学的尹一通老师，感谢他们在研究过程中给予的指导。感谢李乾和凤维明在研究过程中给予的帮助。

我由衷地感谢我的家人。感谢我的父亲一直为我负重前行，让我追求自己的梦想。感谢我的女朋友胡蓝青，感谢她陪我度过这段美妙的时光，让我每天都很幸福。

最后，还要向百忙之中评审此论文的专家致以最诚挚的谢意！